10 IX 25

**MARIO YABRA**

# DERIVADAS

**TECNICA DE LA DERIVACION**

**APLICACIONES DE LAS DERIVADAS**



**Editorial El Coloquio**
Junín 735 - Buenos Aires

## TABLA DE DERIVADAS

| | | |
|---|---|---|
| 1) | $y = C$ | $y' = 0$ |
| 2) | $y = x$ | $y' = 1$ |
| 3) | $y = u + v - w$ | $y' = u' + v' - w'$ |
| 4) | $y = u \,.\, v$ | $y' = u'v + uv'$ |
| 5) | $y = u\,v\,w$ | $y' = u'vw + uv'w + uvw'$ |
| 6) | $y = C \,.\, f(x)$ | $y' = C \,.\, f'(x)$ |
| 7) | $y = x^n$ ($n$: Nº Natural) | $y' = n\,x^{n-1}$ |
| 8) | $y = \frac{u}{v}$ | $y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ |
| 9) | $y = \log_a x$ | $y' = \frac{1}{x} \log_a \ell$ |
| 10) | $y = \ln x = Lx$ | $y' = \frac{1}{x}$ |
| 11) | $y = x^n$ (siendo $n$ número real) | $y' = n \,.\, x^{n-1}$ |
| 12) | $y = a^x$ | $y' = a^x\, La$ |
| 13) | $y = \ell^x$ | $y' = \ell^x$ |
| 14) | $y = u^v$ por el método logarítmico | |
| 15) | $y = \frac{u}{v}$ por el método logarítmico | |
| 16) | $y = sen\, x$ | $y' = \cos x$ |

17) $y = \cos x$ — $y' = -\operatorname{sen} x$

18) $y = \operatorname{tg} x$ — $y' = \sec^2 x$

19) $y = \operatorname{cotg} x$ — $y' = -\operatorname{cosec}^2 x$

20) $y = \sec x$ — $y' = \sec x \operatorname{tg} x$

21) $y = \operatorname{cosec} x$ — $y' = -\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x$

22) $y = \operatorname{arc\,sen} x$ — $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

23) $y = \operatorname{arc\,cos} x$ — $y' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

24) $y = \operatorname{arc\,tg} x$ — $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$

25) $y = \operatorname{arc\,cotg} x$ — $y' = \dfrac{-1}{1+x^2}$

26) $y = \operatorname{arc\,sec} x$ — $y' = \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$

27) $y = \operatorname{arc\,cosec} x$ — $y' = \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}$

**Demostraciones de cada una de las Derivadas de la Tabla Anterior**

1) $y = C$

Recuérdense los distintos pasos para el cálculo de derivadas:



a) Se incrementa la función en $\Delta y$.

b) Se resta la función incrementada menos la función primitiva.

c) Se divide por el incremento de la variable independiente ($\Delta x$).

d) Se pasa al límite para $\Delta x$ tendiendo a $0$.

En el caso concreto que tenemos nos queda entonces:

(1) $y = C$

(2) $y + \Delta y - y = C - C$

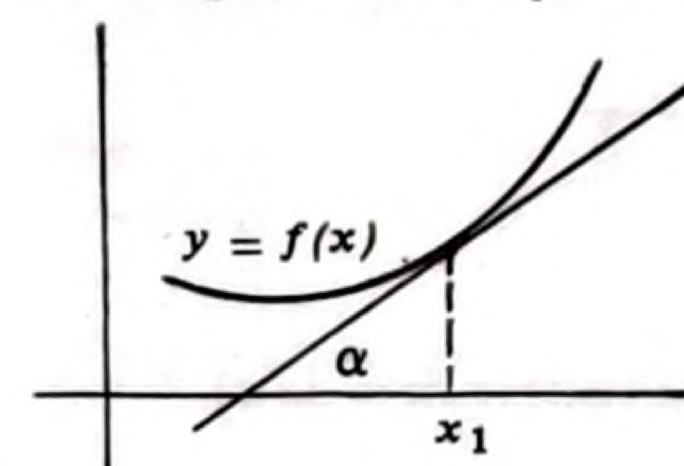
$$\Delta y = 0$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 0$$

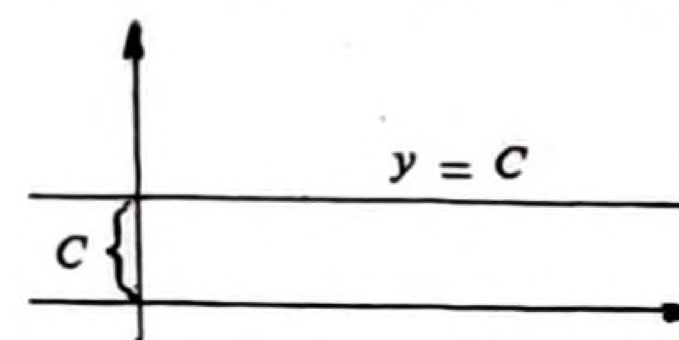
Esto significa que la derivada de una constante es igual a $0$.

¿Qué significado geométrico tiene este resultado? Recuérdese que la derivada de una función en un punto es igual a la tangente trigonométrica del ángulo formado por la recta tangente a dicha función en el citado punto y el sentido positivo del eje de las $x$.




$$[f'(x)]_{x=x_1} = \operatorname{tg} \alpha$$

En el caso particular que tratamos $y = c$, gráficamente es una recta paralela al eje $x$ que corta al eje $y$ en el punto C.



Como se observa la recta considerada no corta al eje $x$, o dicho de otra manera, forma un ángulo de $0°$; y la $tg 0° = 0$. Obsérvese la similitud de este resultado con el de la derivada de una constante.

2) $y = x \quad (1)$

$$y + \Delta y = x + \Delta x \quad (2)$$

$$(2) - (1) \qquad y + \Delta y - y = x + \Delta x - x$$

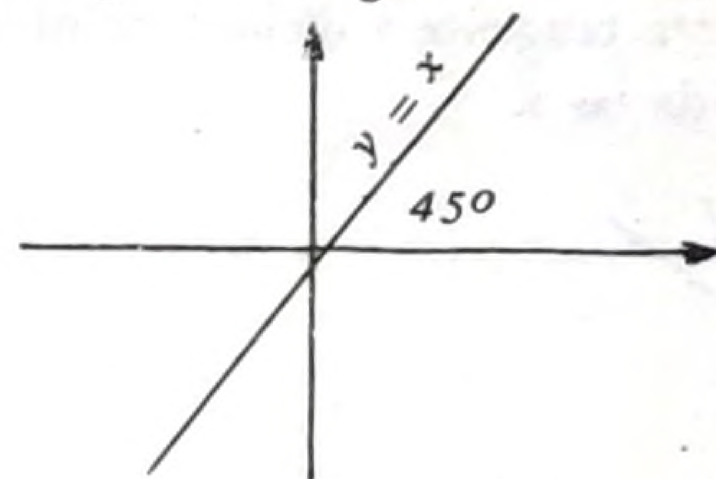
$$\Delta y = \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\Delta x \Rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$$

Esto significa que la derivada de la variable es igual a 1.

¿Qué significa este resultado? En este caso la función dada $y = x$ representa una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas, bisectriz del 1er. y 3er. cuadrante que forma con el sentido positivo del eje $x$, un ángulo de 45°; como sabemos $tg\, 45° = 1$ igual al de la derivada.




3) $y = u + v - w$ (siendo $u$, $v$ y $w$ funciones cualesquiera de $x$)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) - (w + \Delta w)$$

Restando miembro a miembro, tenemos:

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v - \Delta w$$



$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} - \frac{\Delta w}{\Delta x}$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x} \quad \therefore$$

$$y' = u' + v' - w'$$

**Lo que nos dice que la derivada de una suma algebráica es igual a la suma algebráica de las derivadas de cada sumando.**

4) $y = u \cdot v$ (siendo $u; v$ funciones de $x$)

$$y + \Delta y = (u + \Delta u)\,(v + \Delta v) = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$y + \Delta y - y = uv + u\Delta v + v\Delta u + \Delta u\, \Delta v - uv$$

$$\Delta y = u\Delta v + v \cdot \Delta u + \Delta u \cdot \Delta v$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta u\, \Delta v}{\Delta x}$$

Pasando al límite para $\Delta x \to 0$, nos queda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = u \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} + v \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u\, \Delta v}{\Delta x}$$

$$y' = uv' + u'v$$

El último término del 2do. miembro $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u\, \Delta v}{\Delta x}$

Se podría escribir $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \Delta v = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \Delta u$

y en ambos casos tiende a $0$ puesto que cuando $\Delta x \to 0$, también $\Delta u$ y $\Delta v \to 0$.

Recapitulando, la derivada de un producto de 2 factores es igual a la suma de 2 sumandos; cada uno de éstos está formado por la derivada de 1 de los factores multiplicada por el otro factor sin derivar.

5) $y = u \cdot v \cdot w$

La derivada de esta función surge por aplicación de la regla anterior.

Consideremos,

$$y = u \cdot v \cdot w = (uv)\, w$$

Por la aplicación de la regla anterior,

$$y' = (uv)'\, w + (uv)\, w'$$

$$y' = (u'v + uv')\, w + (uv)\, w'$$

Haciendo operaciones nos queda,

$$y' = u'vw + uv'w + uvw'$$

Es decir, la derivada de un producto de 3 factores es igual a la suma de 3 sumandos; cada uno de éstos está formado por la derivada de 1 de los factores multiplicada por los otros 2 factores sin derivar. En general, la derivada de un producto de $n$ factores es igual a la suma de $n$ sumandos; cada uno de éstos está formado por la derivada de 1 de los factores multiplicada por los otros $(n - 1)$ factores sin derivar.

6) $y = C \cdot f(x)$

Aplicando la regla 4 tenemos,

$$y' = C' f(x) + C \cdot f'(x)$$

Pero $C' = 0$ (por regla 1) $\therefore$

$$y' = C \cdot f'(x)$$



**Lo que nos dice que la derivada del producto de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función.**

7) $y = x^n$ $(1)$ **(siendo $n$ número natural)**

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$$ **Aplicando el binomio de Newton,**

$$y + \Delta y = x^n + nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1)\ x^{n-2}}{2!} \cdot (\Delta x)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)\ x^{n-3}}{3!} \cdot (\Delta x)^3 + \ldots\ldots\ldots (2)$$

Restando m. a m. (2) - (1)

$$\Delta y = nx^{n-1}\,\Delta x + \frac{n(n-1) \cdot x^{n-2}}{2!} (\Delta x)^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{3!} \cdot x^{n-3} \cdot (\Delta x)^3 + \ldots\ldots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1}\,\frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{n(n-1)\ x^{n-2}}{2!}\,\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} + \frac{n(n-1)(n-2)\ x^{n-3}}{3!}\,\frac{(\Delta x)^3}{\Delta x} + \ldots\ldots$$

**Pasando al límite cuando $\Delta x \to 0$, todos los términos del 2do. miembro excepto el primero $(n \cdot x^{n-1})$ tienden a 0, pués todos tienen como factor potencias crecientes de $\Delta x$ que como antes vimos, tiende a 0 $\therefore$**

$$y' = n\,x^{n-1}$$

**Esta regla también hubiera surgido por aplicación de la regla 5) recordando que $y = x^n$ se podía escribir**

$$y = \overbrace{x \cdot x \cdot x \ldots\ldots\ldots\ldots x}^{n \text{ veces}}$$

¿Y la derivada de ésto cuánto es? Como son $n$ factores, vamos a tener por 5 una suma de $n$ sumandos; cada sumando va a estar compuesto por la derivada de cada factor (del primero, segundo, ..., enésimo) que como sabemos por 2 es igual a 1), por todos los demás factores sin derivar que son $x^{n-1}$.

Por lo tanto,

$$y' = 1xxx \ldots x + x \,.\, 1 \,.\, x \ldots x + \ldots\; x \,.\, x \,.\, x \ldots x \,.\, 1$$

$$y' = n\, x^{n-1}$$

Veremos más adelante que esta regla también es válida para $n$ como número entero, racional e irracional.

8) $y = \dfrac{u}{v}$

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$y + \Delta y - y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

$$\Delta y = \frac{(u + \Delta u)\, v - u\,(v + \Delta v)}{(v + \Delta v)\, v}$$

$$\Delta y = \frac{uv + v\Delta u - (uv + u\Delta v)}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \,.\, \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \,.\, \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v\Delta v}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}$$



$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

El 2do. término del denominador $\left(v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}\right)$ se desprecia, puesto que cuando $\Delta x \to 0$ también $\Delta v \to 0$ por lo que su valor (del 2do. término) $\to 0$.

En una palabra, la derivada de un cociente es igual a otro cociente, cuyo denominador es igual al cuadrado del denominador de la función dada, y el numerador está dado por la derivada del numerador multiplicada por el denominador sin derivar, menos la derivada del denominador por el numerador sin derivar.

Veamos como aplicación estos casos:

I) $y = \dfrac{c}{f(x)}$ (una constante dividida por una función)

$$y' = \frac{c' f(x) - c \,.\, f'(x)}{[f(x)]^2} = \frac{-c\, f'(x)}{[f(x)]^2}$$

II) $y = \dfrac{f(x)}{c}$ (una función dividida por una constante)

$$y' = \frac{f'(x) \,.\, c - c' f(x)}{c^2} = \frac{c f'(x)}{c^2} = \frac{f'(x)}{c}$$

También podría haberse hecho así:

$$y = \frac{f(x)}{c} = \frac{1}{c}\, f(x) \text{ (constante } \frac{1}{c} \text{ por una } f(x)\text{)}$$

$$y' = \frac{1}{c} \,.\, f'(x) = \frac{f'(x)}{c}$$

Por causas obvias, si numerador y denominador, son constantes su derivada es igual a 0.

9) $y = \log_a x$

$$y + \Delta y = \log_a (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{(x + \Delta x)}{x} \quad (1)$$

Puesto que $\log_a \frac{u}{b} = \log_a u - \log_a b$ por definición del logaritmo de 1 cociente

siguiendo con (1) $\Delta y = \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x}) = \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{1}{\Delta x}} \quad (2)$$

Puesto que $\log_a b^x = x \log_a b$ por definición del logaritmo de una potencia.

Ahora hacemos $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{m} \quad (3)$

$$\therefore \frac{m}{x} = \frac{1}{\Delta x} \quad (4)$$

Reemplazando (3) y (4) en (2) nos queda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a (1 + \frac{1}{m})^{\frac{m}{x}} = \log_a [(1 + \frac{1}{m})^m]^{\frac{1}{x}}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a (1 + \frac{1}{m})^m \quad (5)$$

Pasamos al límite cuando $\Delta x \to 0$; observemos en (3) que cuando $\Delta x \to 0$; el primer miembro de la igualdad tenderá también a $0$; para que ocurra lo mismo en el segundo miembro de la igualdad $\frac{1}{m}$; debe necesariamente $m$ tender a infinito. La misma conclusión surge de (4).

Por lo tanto en (5)

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{1}{x} \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^m$$



Pero como sabemos que

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^m = e \quad \therefore \quad y' = \frac{1}{x} \log_a e$$

10) $y = \ln x = \log_e x = Lx$

Por aplicación de la regla anterior

$y' = \frac{1}{x} Le$ pero $Le$ (logaritmo de la base) es igual a 1

$$y' = \frac{1}{x}$$

A este resultado también podría haberse arribado siguiendo el procedimiento anterior.

11) $y = x^n$ (siendo $n$ número entero, racional e irracional).

Ya hemos visto que la derivada es igual a $nx^{n-1}$; fue demostrada de dos maneras, pero para $n$: número natural. Ahora ampliaremos la derivada para $n$: número entero, racional e irracional. Se procede de la siguiente manera:

$$y = x^n$$

Se aplican logaritmos naturales en cada miembro

$$Ly = Lx^n = n \cdot Lx$$

Se sacan derivadas en cada miembro separadamente. En el primer miembro tenemos que sacar la derivada de $Ly$; $Ly$ es una función de $y$, pero $y$ es a su vez una función de $x$; es decir $Ly$ es una función de función y como tal se deriva. En el segundo miembro tenemos una constante ($n$) por una función ($Lx$) y como tal se deriva.

$$(Ly)'_{(y)} \cdot y'(x) = n \cdot (Lx)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = n \cdot \frac{1}{x} \quad \therefore$$

$$y' = y \cdot n \cdot \frac{1}{x} \quad \text{Pero } y = x^n \quad \therefore$$

$$y' = \frac{x^n}{x} \cdot n = nx^{n-1}$$

Este método de aplicar logaritmos antes de derivar es lo que se llama método logarítmico de derivación. Al derivar el primer miembro siempre va a quedar $\frac{y'}{y}$, y luego se pasa $y$ al segundo miembro multiplicando y se la pasa por su valor.

12) $y = a^x$

$$Ly = La^x = x \cdot La \quad (La \text{ es una constante})$$

$$\frac{y'}{y} = La \quad \therefore \quad y' = y \cdot La$$

$$y' = a^x La$$

13) $y = e^x$

$$Ly = Le^x = x Le = x$$

$$\frac{y'}{y} = 1 \quad \therefore \quad y' = y \quad \therefore \quad y = e^x$$

Este resultado podría haber surgido de la regla anterior.

$$y' = e^x Le = e^x$$

Es la única función que tiene la misma derivada.



14) $y = u \cdot v$ **por el método logarítmico**

$$Ly = Luv = Lu + Lv$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v} = \frac{u'v + uv'}{uv}$$

$$y' = y \cdot \frac{u'v + uv'}{uv} = uv \frac{u'v + uv'}{uv} \quad \therefore$$

$$y = u'v + uv'$$

**Obsérvese con qué sencillez se determina la derivada, y la similitud del resultado con el de la regla 4.**

**De la misma manera se puede sacar la derivada de** $y = u \cdot v \cdot w$

15) $y = \frac{u}{v}$ **por el método logarítmico**

$$Ly = L\frac{u}{v} = Lu - Lv$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{u'}{u} - \frac{v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{uv}$$

$$y' = y \cdot \frac{u'v - uv'}{uv} = \frac{u}{v} \cdot \frac{u'v - uv'}{uv}$$

**Simplificando la** $u$, **y haciendo operaciones**

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

16) $y = sen\, x$

$$y + \Delta y = sen\,(x + \Delta x)$$

$$\Delta y = sen\,(x + \Delta x) - sen\, x \qquad (1)$$

En el segundo miembro tenemos la diferencia de dos senos (que no es igual al seno de la diferencia de dos arcos).

Recuérdese que $sen\, p - sen\, q = 2\, sen \frac{p-q}{2} . \cos \frac{p+q}{2}$

Por lo tanto en (1) tenemos

$$\Delta y = 2\, sen \frac{x + \Delta x - x}{2} \cos \frac{x + \Delta x + x}{2}$$

$$\Delta y = 2\, sen \frac{\Delta x}{2} \cos \frac{2x + \Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{\Delta x} . sen \frac{\Delta x}{2} . \cos \frac{2x + \Delta x}{2}$$

En el segundo miembro tenemos un producto de tres factores de los cuales nos interesa el primero $\frac{2}{\Delta x}$, en lugar de multiplicar $\frac{2}{\Delta x}$ dividimos todo por el inverso $\frac{\Delta x}{2}$ o sea,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{sen \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} . \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \qquad (2)$$

Y ahora pasemos al límite cuando $\Delta x \to 0$; cuando ello ocurra $\frac{\Delta x}{2} \to 0$ también.

Recuérdese entonces que $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{sen \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$ porque es un límite similar al

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sen\, x}{x} = 1$ como sabemos. En (2) nos queda

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{sen \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$y' = 1 . \cos x = \cos x$$



17) $y = \cos x$

$$y + \Delta y = \cos (x + \Delta x)$$

$$\Delta y = \cos (x + \Delta x) - \cos x \qquad (1)$$

**En el segundo miembro tenemos la diferencia de dos cosenos (que no es igual al coseno de la diferencia de dos arcos).**

$$\cos p - \cos q = -2\, sen \frac{p+q}{2}\, sen \frac{p-q}{2}$$

**Por lo tanto (1) quedaría**

$$\Delta y = -2\, sen \frac{x + \Delta x + x}{2}\, sen \frac{x + \Delta x - x}{2}$$

$$\Delta y = -2\, sen \frac{2x + \Delta x}{2}\, sen \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2}{\Delta x} . sen \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) . sen \frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -sen \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \frac{sen \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = -sen\, x . 1$$

$$y' = -sen\, x$$

18) $y = tg\, x$

**La derivada de esta función y las trigonométricas siguientes se deducen ya no por incrementos, sino por aplicación de las derivadas de *sen x* y *cos x*.**

$$y = tg\, x = \frac{sen\, x}{\cos x}$$

Aplicando la regla 8

$$y' = \frac{(sen\,x)'\cos x - sen\,x\,.\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{\cos x\,.\,\cos x - sen\,x\,(-sen\,x)}{\cos^2 x}$$

$$y' = \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

Si hubiéramos hecho el cociente $\frac{\cos^2 x + sen^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{sen^2 x}{\cos^2 x} =$

$$= 1 + tg^2 x \therefore y' = 1 + tg^2 x$$

En definitiva $y = tg\,x \therefore$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x} \;;\text{ ó }\; y' = \sec^2 x \;;\text{ ó }\; y' = 1 + tg^2 x$$

19) $y = cotg\,x = \frac{\cos x}{sen\,x}$

$$y' = \frac{(\cos x)'\,sen\,x - \cos x\,(sen\,x)'}{(sen\,x)^2} = \frac{sen\,x\,.\,sen\,x - \cos x\,.\,\cos x}{sen^2 x}$$

$$y' = \frac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \frac{-1}{sen^2 x} = -cosec^2 x$$

Si hubiéramos hecho el cociente $\frac{-\cos^2 x - sen^2 x}{sen^2 x}$

$$y' = -cotg^2 x - 1 = -(1 + cotg^2 x)$$

En definitiva $y = cotg\,x$

$$y' = \frac{-1}{sen^2 x} \;;\quad y' = cosec^2 x \;;\quad y' = -(1 + cotg^2 x)$$

20) $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$



$$y' = \frac{0\,.\,\cos x - 1\,.\,(\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{-1\,(-sen\,x)}{\cos^2 x} = \frac{sen\,x}{\cos^2 x}$$

y también $y' = \frac{sen\,x}{\cos^2 x} = \frac{sen\,x}{\cos x\,.\,\cos x} = \frac{sen\,x}{\cos x}\,.\,\frac{1}{\cos x} = tg\,x\,.\,\sec x$

$$\therefore\; y' = \sec x\; tg\,x$$

21) $y = cosec\,x = \frac{1}{sen\,x}$

$$y' = \frac{0\,.\,sen\,x - 1\,.\,(sen\,x)'}{(sen\,x)^2} = \frac{-\cos x}{sen^2 x} = \frac{-\cos x}{sen\,x}\,.\,\frac{1}{sen\,x}$$

$$y' = -cotg\,x\,.\,cosec\,x$$

22) $y = arc\,sen\,x$ (1)

Es una función trigonométrica inversa que se lee "$y$ es el arco cuyo seno vale $x$", por lo que podemos escribir que "$x$ es el seno de $y$" y usando un lenguaje matemático $x = sen\,y$.

Antes de determinar la derivada de la función (1), pasemos a demostrar como se hallan las derivadas de las funciones inversas; podemos escribir que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}$ y pasando al límite para $\Delta x \to 0$ , nos queda que $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}} \;\therefore\; y'(x) = \frac{1}{x'(y)} \qquad (2)$$

$y'(x)$ derivada de $y$ con respecto a $x$
$x'(y)$ derivada de $x$ con respecto a $y$

En el caso de que se trata

$$y = arc\,sen\,x \;\therefore\; x = sen\,y$$

$$y' = \frac{1}{x'}$$

$$y' = \frac{1}{(sen\, y)'} = \frac{1}{cos\, y}$$

Pero $cos\, y = \sqrt{1 - sen^2 y}$ ∴

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - sen^2 y}} \quad ;\text{pero } sen\, y = x \quad ∴$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

23) $y = arc\, cos\, x$ ∴

$x = cos\, y$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{x'_{(y)}} = \frac{1}{(cos\, y)'} = \frac{1}{-sen\, y} = \frac{1}{-\sqrt{1 - cos^2 y}}$$

$$y'_{(x)} = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Obsérvese que el resultado arribado, es similar al de la función anterior, difiriendo únicamente en el signo.

24) $y = arc\, tg\, x$ ∴

$x = tg\, y$

$$y'_{(x)} = \frac{1}{x'_{(y)}} = \frac{1}{(tg\, y)'} \qquad (1)$$

Aplicando la regla Nº 18, nos queda en (1)

$$y'_{(x)} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

25) $y = arc\, cotg\, x$



$x = cotg\, y$

$$y'(x) = \frac{1}{(cotg\, y)'} = \frac{1}{-cosec^2 y} \qquad (1)$$

Veamos cómo escribimos $cosec^2 y$ en función de $cotg\, y$

$$cosec^2 y = \frac{1}{sen^2 y} = \frac{sen^2 y + cos^2 y}{sen^2 y} = \frac{sen^2 y}{sen^2 y} + \frac{cos^2 y}{sen^2 y}$$

$$cosec^2 y = 1 + cotg^2 y \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) queda:

$$y' = \frac{-1}{1 + cotg^2 y} = \frac{-1}{1 + x^2}$$

26) $y = arc\, sec\, x$

$x = sec\, y$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{(sec\, y)'} = \frac{1}{sec\, y \quad tg\, y} \qquad (1)$$

pero $tg^2 y = \dfrac{sen^2 y}{cos^2 y} = \dfrac{1 - cos^2 y}{cos^2 y} = \dfrac{1}{cos^2 y} - 1 =$

$$= sec^2 y - 1 \;∴\; tg\, y = \sqrt{sec^2 y - 1} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) nos queda

$$y' = \frac{1}{sec\, y \sqrt{sec^2 y - 1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

27) $y = arc\, cosec\, x$ ∴

$x = cosec\, y$

$$y' = \frac{1}{(cosec\, y)'} = \frac{1}{-cosec\, y \,.\, cotg\, y} \qquad (1)$$

Pero: $$cotg^2 y = \frac{cos^2 y}{sen^2 y} = \frac{1 - sen^2 y}{sen^2 y} = \frac{1}{sen^2 y} - \frac{sen^2 y}{sen^2 y}$$

$$cotg^2 y = cosec^2 y - 1 \quad \therefore$$

$$cotg\, y = \sqrt{cosec^2 y - 1} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1)

$$y' = \frac{-1}{cosec\, y \sqrt{cosec^2 y - 1}} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2 - 1}}$$

Más adelante se determinan las derivadas de las funciones hiperbólicas y de algunas de sus inversas.

***



**Ejercicio Nº 1**

Calcular la derivada de $y = C$

Como se sabe, la derivada de una constante es igual a $0$. Por lo tanto $y' = 0$.

Debemos aclarar que $y'$ significa derivada primera; en otras oportunidades veremos que la nomenclatura $D\,f(x)$ significa "derivada de la función de $x$".

**Ejercicio Nº 2**

Calcular la derivada de $y = 2$

Por ser $2$ una constante, su derivada es igual a $0 \therefore y' = 0$

**Ejercicio Nº 3**

Calcular la derivada de $y = -8$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 4**

Idem $y = a \therefore y' = 0$

Es de destacar que en matemáticas superior son constantes los números, las primeras letras del alfabeto, los números $\ell$ (2,7182...); $\pi$ (3,14...) y todas las operaciones que hagamos con ellos, sin que intervenga ninguna variable; en todos estos casos son constantes y como tal se deriva.

**Ejercicio Nº 5**

Derivada de $y = \sqrt{3}$

$y' = 0$

*

**Ejercicio Nº 6**

$y = sen\ \pi$

Recuérdese que el seno de $\pi$ es igual a $0 \therefore y = 0 \therefore y' = 0$

**Ejercicio Nº 7**

$y = arc\ sen\ 1$

Recuérdese que esto significa que $y$ es el arco cuyo seno vale 1, que como sabemos es cuando el arco vale $\frac{\pi}{2} \therefore y = arc\ sen\ 1 = \frac{\pi}{2}$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 8**

$y = log_3 27$, que se lee logaritmo en base 3 del número 27. Como sabemos un logaritmo es un exponente; en este caso es el número al cual hay que llevar la base para que nos dé 27 $\therefore y = log_3 27 = 3$ porque $3^3 = 27$

$\therefore y' = 0$

**Ejercicio Nº 9**

$y = \sqrt{\ell}$.

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 10**

$y = \ell^2$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 11**

$y = \ell^{sen \pi}$



$y' = 0$

**Ejercicio Nº 12**

$y = L2\ .\ \pi^{\ell}$

Es un producto de dos constantes $\therefore y' = 0$

**Ejercicio Nº 13**

$y = (log_{10} 100)^3 = (2)^3 = 8$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 14**

$y = L\ sen \frac{\pi}{2}$ que se lee logaritmo natural del seno de $\frac{\pi}{2}$. Débese aclarar que aquí no existe ningún producto; por otra parte $L$ es el logaritmo natural, neperiano o hiperbólico, que son los que tienen como base del sistema el número irracional $\ell = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 15**

$y = \pi$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 16**

$y = \sqrt{\pi}$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 17**

$y = \pi^{sen\pi}$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 18**

$y = \ell^{\pi}$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 19**

$y = \pi^{L\pi}$

$y' = 0$

**Ejercicio Nº 20**

$y = x$

Su derivada es igual a $1 \therefore y' = 1$

Por otra parte, debemos destacar que generalmente se utilizan como variables en matemáticas superiores las últimas letras del alfabeto $(r, s, t, u, v, w, x, y, z)$

**Ejercicio Nº 21**

$y = t$

$y' = 1$

**Ejercicio Nº 22**

$y = w$

$y' = 1$



**Ejercicio Nº 23**

$y = x^2$

Debemos aplicar la regla de la derivación de la función $y = x^n$ que como sabemos es igual a $nx^{n-1} \therefore y = x^n \therefore y' = nx^{n-1}$

En este caso particular $y' = 2x^{2-1} = 2x$

**Ejercicio Nº 24**

$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$

$y' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

**Ejercicio Nº 25**

$y = \sqrt{x} = x^{1/2}$

$y' = \frac{1}{2}x^{1/2-1} = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2x^{1/2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

**Ejercicio Nº 26**

$y = \sqrt[3]{x} = x^{1/3}$

$y' = \frac{1}{3}x^{1/3-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

**Ejercicio Nº 27**

$y = \sqrt[5]{x^m} = (x^m)^{1/5} = x^{\frac{m}{5}}$

$y' = \frac{m}{5}x^{\frac{m}{5}-1} = \frac{m}{5}x^{\frac{m-5}{5}} = \frac{m\sqrt[5]{x^{m-5}}}{5}$

## Ejercicio Nº 28

$$y = \sqrt[28]{x^{71}} = x^{71/28}$$

$$y' = \frac{71}{28} x^{71/28-1} = \frac{71}{28} x^{43/28} = \frac{71 \sqrt[28]{x^{43}}}{28}$$

## Ejercicio Nº 29

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^6}} = \frac{1}{x^{6/4}} = \frac{1}{x^{3/2}} = x^{-3/2}$$

$$y' = -\frac{3}{2} x^{-\frac{3}{2}-1} = -\frac{3}{2} x^{-5/2} = \frac{-3}{2x^{5/2}} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}}$$

## Ejercicio Nº 30

Calcular la derivada de $y = x^2$ por incrementos

$y = x^2$ (1)

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 \quad (2)$$

(2) - (1) $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x + 0 = 2x$$

## Ejercicio Nº 31

Calcular la derivada de $y = x^3$ por incrementos

$y = x^3$

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^3 = x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$



$$\Delta y = 3x^2 \cdot \Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 3x^2$$

Porque los dos últimos sumandos del segundo miembro se anulan.

## Ejercicio Nº 32

Calcular la derivada de $y = C \cdot x^2$ por incrementos ($C$: una constante cualquiera).

$y = C \cdot x^2$ (1)

$y + \Delta y = C \cdot (x + \Delta x)^2$ (2) cuando se incrementa la función la $C$ se mantiene **constante.**

(2) - (1) $\Delta y = C(x + \Delta x)^2 - Cx^2$

$$\Delta y = C(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x) - C \cdot x^2$$

Recuérdese que $(\Delta x)^2 = \Delta^2 x \neq \Delta x^2$

Sigamos con el desarrollo

$$\Delta y = Cx^2 + 2Cx\Delta x + C \cdot \Delta^2 x - Cx^2$$

$$\Delta y = 2Cx\Delta x + C\Delta^2 x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2Cx + C \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = 2Cx + 0$$

$$y' = 2Cx$$

Debemos tener presente que $y = C \cdot f(x)$ (Producto de una constante por

una función cualquiera); su derivada es igual a la constante por la derivada de la función. $y' = C \,.\, f'(x)$

En este caso: $y = C \,.\, x^2 \;\therefore\; y' = C\,.\,(x^2)' = C\,.\,2x = 2Cx$

**Ejercicio Nº 33**

Calcular la derivada de $y = \dfrac{1}{x^2}$ por incrementos

$$y = \frac{1}{x^2} \qquad (1)$$

$$y + \Delta y = \frac{1}{(x+\Delta x)^2} = \frac{1}{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2} \qquad (2)$$

$$(2)-(1) \qquad \Delta y = \frac{1}{x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x} - \frac{1}{x^2}$$

Sacamos denominador común

$$\Delta y = \frac{x^2 - (x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x)}{(x^2 + 2x\Delta x + \Delta^2 x)\,x^2} = \frac{x^2 - x^2 - 2x\Delta x - \Delta^2 x}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2\Delta^2 x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\dfrac{-2x\Delta x - \Delta^2 x}{\Delta x}}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2\Delta^2 x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2x - \Delta x}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2\Delta^2 x}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{-2x - \Delta x}{x^4 + 2x^3\Delta x + x^2\Delta^2 x}$$

$$y' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

**Verifíquese este resultado con el Ejercicio Nº 24.**



**Ejercicio Nº 34**

**Calcular la derivada de $y = \sqrt{x}$ por incrementos.**

$$y = \sqrt{x}$$

$$y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$\Delta y = \sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

**Multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}$, por lo que nos queda**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x})\,(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

**En el numerador tenemos un producto del tipo $(a-b)\,(a+b) = a^2 - b^2 \;\therefore$**

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x+\Delta x})^2 - (\sqrt{x})^2}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x\,(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**Verifíquese el resultado con el Ejercicio Nº 25.**

**Ejercicio Nº 35**

$$y = x^3 + 2x^2 - x$$

**La derivada de una suma algebraica es igual a la suma algebraica de la derivada de cada uno de los sumandos.**

$$y' = (x^3)' + (2x^2)' - (x)'$$

$$y' = 3x^2 + 4x - 1$$

## Ejercicio Nº 36

$$y = 5x^4 + 3x^3 - 2x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^5}$$

$$y = 5x^4 + 3x^3 - 2x + x^{-2} - x^{-5}$$

$$y' = (5x^4)' + (3x^3)' - (2x)' + (x^{-2})' - (x^{-5})'$$

$$y' = 20x^3 + 9x^2 - 2 + (-2x^{-3}) - (-5x^{-6})$$

$$y' = 20x^3 + 9x^2 - 2 - \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^6}$$

## Ejercicio Nº 37

$$y = \sqrt[3]{x^5} + \sqrt[5]{x^3} = x^{5/3} + x^{3/5}$$

$$y' = \frac{5}{3}x^{2/3} + \frac{3}{5}x^{-2/5}$$

$$y' = \frac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} + \frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}$$

## Ejercicio Nº 38

$$y = \frac{1}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = x^{-3/4} - x^{-4/3}$$

$$y' = -\frac{3}{4}x^{-7/4} + \frac{4}{3}x^{-7/3}$$

$$y' = \frac{-3}{4\sqrt[4]{x^7}} + \frac{4}{3\sqrt[3]{x^7}}$$



## Ejercicio Nº 39

$$y = \frac{1}{x^{-2}} - x^{-2}$$

$$y = x^2 - x^{-2}$$

$$y' = 2x + 2x^{-3} = 2x + \frac{2}{x3}$$

## Ejercicio Nº 40

$$y = 5x^3 - 4x + 3\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{x^5}}$$

$$y = 5x^3 - 4x + 3x^{1/2} - x^{-5/4}$$

$$y' = 15x^2 - 4 + \frac{3}{2}x^{-1/2} + \frac{5}{4}x^{-9/4}$$

$$y' = 15x^2 - 4 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{5}{4\sqrt[4]{x^9}}$$

## Ejercicio Nº 41

$$y = (2x + 1)(4x - 3)$$

**Aquí tenemos un producto de 2 factores funcionales del tipo $y = f(x) \cdot g(x)$, su derivada es**

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

**Por lo tanto en el caso particular será:**

$$y' = 2(4x - 3) + (2x + 1)\,4 = 8x - 6 + 8x + 4 = 16x - 2$$

**Al mismo resultado se hubiera arribado, si se hubiera hecho primero el producto y luego se derivaba.**

$$y = (2x + 1)(4x - 3) = 8x^2 - 6x + 4x - 3 = 8x^2 - 2x - 3$$

$$y' = 16x - 2$$

**Ejercicio Nº 42**

$$y = \frac{4}{\sqrt{x^3 + 4x}} = 4(x^3 - 4x)^{-1/2} \qquad (1)$$

Para resolver esta derivada debemos aplicar un método llamado de función de función, para lo cual hacemos $u = x^3 - 4x$ (2) $\therefore$ $u'(x) = 3x^2 - 4$ (derivada de $u$ con respecto a $x$).

Pero al hacer esta sustitución, nos queda que

$$y = 4 \cdot u^{-1/2} \quad \therefore \quad y'(u) = 4\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot u^{-3/2}$$

$y'(u) = \dfrac{-2}{\sqrt{u^3}}$ (3) (derivada de $y$ con respecto a $u$)

Pero, cómo se aplican estos resultados? Recordemos entonces que,

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; pasando al límite nos queda que,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

o sea que

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x)$$

Por lo tanto en el caso particular que tenemos,

$$y'(x) = \frac{-2}{\sqrt{u^3}} \cdot (3x^2 - 4) = \frac{-6x^2 + 8}{\sqrt{(x^3 - 4x)^3}}$$

Normalmente no se aplican estas fórmulas, sino que se procede de la siguiente manera: en (1) tenemos el producto de una constante por una función cualquiera, y como tal se deriva recordando que es igual a la constante por la derivada de la función.

Es decir que: $\quad y' = 4\,[(x^3 - 4x)^{-1/2}]' \qquad (4)$

Ahora tenemos que determinar en (4) la derivada del corchete, para lo cual



debemos tener como principio fundamental ir derivando de la operación mayor a la menor, es decir, primero derivamos con respecto a la potencia

$y' = 4\left(-\dfrac{1}{2}\right)(x^3 - 4x)^{-\frac{1}{2}-1} \cdot D(x^3 - 4x)$ para luego derivar la base de la potencia o sea, $x^3 - 4x$, que es igual a $3x^2 - 4$; por lo tanto,

$$y' = -2(x^3 - 4x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (3x^2 - 4) = \frac{-2(3x^2 - 4)}{\sqrt{(x^3 - 4x)^3}}$$

$$y' = \frac{-6x^2 + 8}{\sqrt{(x^3 - 4x)^3}}$$

Antes de seguir adelante debemos captar bien este principio de derivación de una función de función (de función...), siempre que se tenga que derivar debemos ir derivando de la mayor operación a la menor operación, y siempre se podrá calcular la derivada por más compleja que sea la función.

**Ejercicio Nº 43**

$$y = \sqrt{x^2 + 3x}$$

Recordemos que $y = \sqrt{x}$, $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (Ej. 25)

Por la aplicación del concepto anterior

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 3x}} \cdot D(x^2 + 3x) = \frac{2x + 3}{2\sqrt{x^2 + 3x}}$$

La letra "D" nos indica que aún debemos derivar la expresión subradical.

**Ejercicio Nº 44**

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^4 - 2)^2}} = (x^4 - 2)^{-2/3}$$

$$y' = \frac{-2}{3}(x^4 - 2)^{-5/3}\; D(x^4 - 2)$$

$$y' = \frac{-2}{3}(x^4 - 2)^{-5/3} \cdot 4x^3$$

$$y' = \frac{-8x^3}{3\sqrt[3]{(x^4-2)^5}}$$

**Ejercicio Nº 45**

$$y = 3x^2\ (x^3 - 2x^2 + 3)$$

$$y' = 6x\,(x^3 - 2x^2 + 3) + 3x^2\,(3x^2 - 4x)$$

$$y' = 6x^4 - 12x^3 + 18x + 9x^4 - 12x^3$$

$$y' = 15x^4 - 24x^3 + 18x = 3x\,(5x^3 - 8x^2 + 6x)$$

**Ejercicio Nº 46**

$$y = (2x^4 - 3x)\ (2x - 1)$$

$$y' = (8x^3 - 3)(2x - 1) + (2x^4 - 3x)\ .\ 2$$

$$y' = 16x^4 - 8x^3 - 6x + 3 + 4x^4 - 6x$$

$$y' = 20x^4 - 8x^3 - 12x + 3$$

**Ejercicio Nº 47**

$$y = (t^3 - t^2 + t)\left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) = (t^3 - t^2 + t)\ (t^{-1} + t^{-2})$$

$$y' = (3t^2 - 2t + 1)(t^{-1} + t^{-2}) + (t^3 - t^2 + t)(-t^{-2} - 2t^{-3})$$

Tenemos una suma de dos sumandos; cada sumando se compone del producto de dos polinomios entre sí; recordando que para efectuarlos debemos multiplicar cada término de uno de los factores por todos los del segundo;

$$\therefore y' = 3t + 3t^0 - 2t^0 - 2t^{-1} + t^{-1} + t^{-2} - t - 2t^0 + t^0 +$$

$$+ 2t^{-1} - t^{-1} - 2t^{-2} = 2t - t^{-2} = 2t - \frac{1}{t^2}$$



**Ejercicio Nº 48**

$$y = x^2\sqrt{x^2 + 3}$$

$$y' = 2x\sqrt{x^2+3} + x^2\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+3}}\ .\ 2x$$

$$y' = 2x\sqrt{x^2+3} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+3}}$$

**Ejercicio Nº 49**

$$y = \sqrt[3]{4x^3 + 2x}\qquad \sqrt[4]{(3x)^3}$$

$$y = (4x^3 + 2x)^{1/3}\ .\ (3x)^{3/4}$$

$$y' = [(4x^3 + 2x)^{1/3}]'\ .\ (3x)^{3/4} + (4x^3 + 2x)^{1/3}\ .\ [(3x)^{3/4}]'$$

$$y' = \frac{1}{3}(4x^3 + 2x)^{-2/3}\ .\ (12x^2 + 2)\ .\ (3x)^{3/4} + (4x^3 + 2x)^{1/3}\ .\ \frac{3}{4}(3x)^{-1/4}\ .\ 3$$

$$y' = \frac{(12\ .\ x^2 + 2)\sqrt[4]{(3x)^3}}{3\sqrt[3]{(4x^3+2x)^2}} + \frac{9\sqrt[3]{4x^3+2x}}{4\ \ \sqrt[4]{3x}}$$

**Ejercicio Nº 50**

$$y = (2x + 4)\ .\ (4x - 3)\,(12x - \pi)$$

Aquí tenemos un producto de tres factores del tipo $y = u.v.w$ (Siendo $u$, $v$, $w$, funciones de $x$); su derivada es $y' = u'vw + uv'w + uvw'$.
En el caso propuesto, tenemos:

$$y' = 2(4x - 3)(12x - \pi) + 4\ .\ (2x + 4)(12x - \pi) + 12\,(2x + 4)(4x - 3)$$

**Ejercicio Nº 51**

$$y = \frac{2x + 3}{4x - 2}$$

Aquí tenemos un cociente de funciones $y = \dfrac{u}{v}$; su derivada es $y' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

es decir, $u = 2x + 3 \;\therefore\; u' = 2;\; v = 4x - 2 \;\therefore\; v' = 4$

Por lo tanto, $y' = \dfrac{2(4x-2) - 4(2x+3)}{(4x-2)^2} = \dfrac{8x - 4 - 8x - 12}{(4x-2)^2} = \dfrac{-16}{(4x-2)^2}$

## Ejercicio Nº 52

$$y = \frac{2x^3 - 4x}{x^2 + 5} \qquad u = 2x^3 - 4x \quad u' = 6x^2 - 4 \qquad v = x^2 + 5 \quad v' = 2x$$

$$y' = \frac{(6x^2 - 4).(x^2+5) - (2x^3 - 4x)\,2x}{(x^2+5)^2}$$

$$y' = \frac{6x^4 + 30x^2 - 4x^2 - 20 - 4x^4 + 8x^2}{(x^2+5)^2} = \frac{2x^4 + 34x^2 - 20}{(x^2+5)^2}$$

## Ejercicio Nº 53

$$y = \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{\sqrt{x}} \qquad u = x^3 - 3x^2 + 4 \quad u' = 3x^2 - 6x \qquad v = \sqrt{x} \quad v' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{(3x^2 - 6x)\sqrt{x} - (x^3 - 3x^2 + 4)\,\frac{1}{2}.x^{-1/2}}{x}$$

$$y' = \frac{3x^{5/2} - 6x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{5/2} + \frac{3}{2}x^{3/2} - 2x^{-1/2}}{x}$$

$$y' = 3x^{3/2} - 6x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} + \frac{3}{2}x^{1/2} - 2x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{5}{2}x^{3/2} - \frac{9}{2}x^{1/2} - 2x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{5\sqrt{x^3}}{2} - \frac{9\sqrt{x}}{2} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$$



## Ejercicio Nº 54

$$y = \frac{(x+1)(x+2)}{x+3} \qquad u = (x+1)(x+2);\; v = x + 3$$

$$u' = (x+2) + (x+1)$$

$$u' = 2x + 3 \qquad v' = 1$$

$$y' = \frac{(2x+3)(x+3) - (x+1)(x+2)}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{2x^2 + 6x + 3x + 9 - x^2 - 2x - x - 2}{(x+3)^2} = \frac{3x^2 + 12x + 11}{(x+3)^2}$$

## Ejercicio Nº 55

$$y = \frac{2x}{\sqrt{x^2 - 3}} \qquad u = 2x \quad u' = 2 \qquad v = \sqrt{x^2 - 3} \quad v' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}}$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 - 3} - 2x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 3}}}{(\sqrt{x^2 - 3})^2} =$$

$$y' = \frac{2\sqrt{x^2 - 3} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2 - 3}}}{x^2 - 3}$$

$$y' = \frac{2(x^2 - 3)^{1/2}}{x^2 - 3} - \frac{2x^2}{(x^2 - 3)(x^2 - 3)^{1/2}} = 2(x^2 - 3)^{-1/2} - 2x^2(x^2 - 3)^{-3/2}$$

$$y' = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 3}} - \frac{2x^2}{\sqrt{(x^2 - 3)^3}}$$

## Ejercicio Nº 56

$$y = \sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{2 - \sqrt{2 - x}}} \cdot \left(0 - \frac{1}{2\sqrt{2 - x}}\right)(0 - 1)$$

$$y' = \frac{1}{4\sqrt{2-\sqrt{2-x}}\ \sqrt{2-x}}$$

**Ejercicio Nº 57**

$$y = sen^3\, x = (sen\, x)^3 \qquad (1)$$

si, $\quad y = sen\, x \qquad y' = cos\, x$

en (1), $\quad y' = 3(sen\, x)^2 \ .\ cos\, x$

$$y' = 3\, sen^2\, x \ .\ cos\, x$$

**Ejercicio Nº 58**

$$y = sen\, x^3$$

$$y' = cos\, x^3 \ .\ 3x^2 = 3x^2\ cos\, x^3$$

Debemos fijar la diferencia entre este ejercicio y el anterior; mientras que en aquél lo que está elevado al cubo es el *seno*, en éste lo es $x$, y por lo tanto sus derivadas son completamente distintas.

**Ejercicio Nº 59**

$$y = cos^2\ x^2 = (cos\, x^2)^2$$

$$y' = 2(cos\, x^2)\ .\ (-\, sen\, x^2)\ .\ 2x$$

$$y' = -\, 4x\ .\ cos\, x^2\ sen\, x^2$$

**Ejercicio Nº 60**

$$y = cos^n \sqrt{x} = (cos\sqrt{x})^n$$



$$y' = n\,(cos\sqrt{x})^{n-1}\ .\ (-\, sen\sqrt{x})\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{-\, n\,(cos\sqrt{x})^{n-1}\ sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{-\, n\ cos^{n-1}\sqrt{x}\ sen\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

**Ejercicio Nº 61**

$$y = tg\ \sqrt{x^3}$$

$$y' = sec^2\ \sqrt{x^3}\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x^3}}\quad 3x^2$$

$$y' = \frac{3x^2\ sec^2\ \sqrt{x^3}}{2\sqrt{x^3}}$$

**Ejercicio Nº 62**

$$y = tg^3\ (x^2+2) = [tg\,(x^2+2)]^3$$

$$y' = 3\,[tg\,(x^2+2)]^2\ .\ sec^2\,(x^2+2)\ .\ 2x$$

$$y' = 6x\ tg^2\ (x^2+2)\ .\ sec^2\,(x^2+2)$$

**Ejercicio Nº 63**

$$y = \sqrt{cotg\ 3x}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{cotg\ 3x}}\ .\ (-\, cosec^2\ 3x)\ .\ 3$$

$$y' = \frac{-3\ cosec^2\ 3x}{2\sqrt{cotg\ 3x}}$$

**Ejercicio Nº 64**

$$y = cotg^2 \frac{3}{x} = (cotg\ 3x^{-1})^2$$

$$y' = 2\ cotg\ 3x^{-1}\ (-cosec^2\ 3x^{-1})\ .\ (-3x^{-2})$$

$$y' = 2\ .\ cotg \frac{3}{x}\ .\ (-cosec^2 \frac{3}{x})\ (-\frac{3}{x^2})$$

$$y' = \frac{6}{x^2}\ cotg \frac{3}{x}\ cosec^2 \frac{3}{x}$$

**Ejercicio Nº 65**

$$y = sec\ \sqrt{x^2+1}$$

$$y' = sec\sqrt{x^2+1}\ .\ tg\sqrt{x^2+1}\ .\ \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\ .\ 2x$$

$$y' = \frac{sec\sqrt{x^2+1}\ tg\ \sqrt{x^2+1}\ .\ x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**Ejercicio Nº 66**

$$y = sec^3 \frac{x^5}{6} = (sec \frac{x^5}{6})^3$$

$$y' = 3\,(sec\frac{x^5}{6})^2\ .\ (sec\frac{x^5}{6})\ .\ (tg\ \frac{x^5}{6})\ .\ (\frac{5x^4}{6})$$

$$y' = \frac{5\,x^4}{2}\ .\ (sec\ \frac{x^5}{6})^3\ .\ tg\ \frac{x^5}{6}$$

$$y' = \frac{5x^4}{2}\ .\ sec^3\ \frac{x^5}{6}.\ tg\ \frac{x^5}{6}$$

**Ejercicio Nº 67**

$$y = cosec^2\ \sqrt[4]{x^3} = [cosec\ x^{3/4}]^2$$



$$y' = 2(cosec\,x^{3/4})\ .\ (-cosec\,x^{3/4}\ .\ cotg\,x^{3/4})\ .\ \frac{3}{4}\ x^{-1/4}$$

$$y' = \frac{-cosec^2\ x^{3/4}\ .\ cotg\,x^{3/4}\ .\ 3}{2\,x^{1/4}} = \frac{-3\ cosec^2\ \sqrt[4]{x^3}\ .\ cotg\,\sqrt[4]{x^3}}{2\,\sqrt[4]{x}}$$

**Ejercicio Nº 68**

$$y = \sqrt[3]{cosec\,(3x-1)} = [cosec\,(3x-1)]^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3}\,[cosec\,(3x-1)]^{-2/3}\ .\ [-cosec\,(3x-1)\ .\ cotg\,(3x-1)]\ .\ 3$$

$$y' = -[cosec\,(3x-1)]^{1/3}\ .\ cotg\,(3x-1)$$

$$y' = -\sqrt[3]{cosec\,(3x-1)}\ .\ cotg\,(3x-1)$$

**Ejercicio Nº 69**

$$y = log_a\,2x$$

$$y' = \frac{1}{2x}.\ log_a\,\ell\ .\ 2 = \frac{log_a\,\ell}{x}$$

**Ejercicio Nº 70**

$$y = log_\pi\,\sqrt{3x-1}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3x-1}}.\ log_\pi\,\ell\ .\ \frac{1}{2\sqrt{3x-1}}.\ 3$$

$$y' = \frac{3}{2\,(3x-1)}.\ log_\pi\,\ell$$

**Ejercicio Nº 71**

$$y = log_8\ (x^2 + \frac{1}{x^2})$$

$$y' = \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \cdot \log_8 \ell \cdot \left(2x - \frac{2}{x^3}\right)$$

$$y' = \frac{2x - \frac{2}{x^3}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} \cdot \log_8 \ell$$

**Ejercicio Nº 72**

$$y = \log_{10} (ax + b)^3$$

$$y' = \frac{1}{(ax + b)^3} \cdot \log_{10} \ell \cdot 3(ax + b)^2 \cdot a$$

$$y' = \frac{3a(ax + b)^2}{(ax + b)^3} \cdot \log_{10} \ell = \frac{3a}{ax + b} \log_{10} \ell$$

**Ejercicio Nº 73**

$$y = \log_{10}^3 \sqrt{2x + 1} = (\log_{10} \sqrt{2x + 1})^3$$

$$y' = 3(\log_{10} \sqrt{2x + 1})^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \cdot \log_{10} \ell \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x + 1}} \cdot 2$$

$$y' = \frac{3 \cdot \log_{10} \ell \cdot \log_{10}^2 (\sqrt{2x} + 1)}{(2x + 1)}$$

**Ejercicio Nº 74**

$$y = \sqrt[3]{\log_3^2 x} = (\log_3 x)^{2/3}$$

$$y' = \frac{2}{3}(\log_3 x)^{-1/3} \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_3 \ell$$

$$y' = \frac{2\log_3 \ell}{3(\log_3 x)^{1/3} x} = \frac{2 \cdot \log_3 \ell}{3\sqrt[3]{\log_3 x} \cdot x}$$

*



**Ejercicio Nº 75**

$$y = \sqrt{\log_{10} \sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\log_{10} \sqrt{x}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \log_{10} \ell \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{\log_{10} \ell}{4x\sqrt{\log_{10} \sqrt{x}}}$$

**Ejercicio Nº 76**

$$y = L\,2x = \log_e 2x = \ln 2x$$

$$y' = \frac{1}{2x} \cdot \log_e \ell \cdot 2 = \frac{1}{x}$$

Se deja constancia que "*L*" significa logaritmo natural, hiperbólico, neperiano o los que tienen como base del sistema el número irracional ℓ.

**Ejercicio Nº 77**

$$y = L^3\, 12x = (L\, 12x)^3$$

$$y' = 3(L12x)^2 \cdot \frac{1}{12x} \cdot 12 = \frac{3L^2\, 12x}{x}$$

**Ejercicio Nº 78**

$$y = L\sqrt{x^3 + x^\pi}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^3 + x^\pi}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 + x^\pi}} \cdot (3x^2 + \pi x^{\pi - 1})$$

$$y' = \frac{3x^2 + \pi x^{\pi - 1}}{2(x^3 + x^\pi)}$$

*

## Ejercicio Nº 79

$$y = L^2 (x^3+1)^4 = [\,L (x^3+1)^4\,]^2$$

$$y' = 2\,[\,L (x^3+1)^4\,] \cdot \frac{1}{(x^3+1)^4} \cdot 4 (x^3+1)^3 \cdot 3x^2$$

$$y' = \frac{24\,x^2 (x^3+1)^3 \cdot L (x^3+1)^4}{(x^3+1)^4} = \frac{24\,x^2 \cdot L (x^3+1)^4}{(x^3+1)}$$

## Ejercicio Nº 80

$$y = \sqrt[3]{L\sqrt{x}} = (L\sqrt{x})^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3} (L\sqrt{x})^{-2/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{6\,x\,\sqrt[3]{L^2 \sqrt{x}}}$$

## Ejercicio Nº 81

$$y = L^2 (x^2+\ell) = [\,L (x^2+\ell)\,]^2$$

$$y' = 2\,L (x^2+\ell) \cdot \frac{1}{x^2+\ell} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{4\,x\,L (x^2+\ell)}{x^2+\ell}$$

## Ejercicio Nº 82

$$y = a^{2x}$$

$$y' = a^{2x} \cdot L\,a \cdot 2 = 2\,a^{2x} \cdot L\,a$$

*



## Ejercicio Nº 83

$$y = 8^{x^3-2}$$

$$y' = 8^{x^3-2} \cdot L\,8 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot 8^{x^3-2} \cdot L\,8$$

## Ejercicio Nº 84

$$y = \pi^{x^2}$$

$$y' = \pi^{x^2} \cdot L\pi \cdot 2x = 2x \cdot \pi^{x^2} \cdot L\pi$$

## Ejercicio Nº 85

$$y = L\sqrt{a^{3x}}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{a^{3x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{a^{3x}}} \cdot a^{3x}\,L\,a \cdot 3$$

$$y' = \frac{3\,a^{3x}\,L\,a}{2\,a^{3x}} = \frac{3\,L\,a}{2}$$

## Ejercicio Nº 86

$$y = 10^{\sqrt{x}}$$

$$y' = 10^{\sqrt{x}} \cdot L\,10 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{10^{\sqrt{x}}\,L\,10}{2\sqrt{x}}$$

## Ejercicio Nº 87

$$y = \ell^{x^3}$$

$$y' = \ell^{x^3} \cdot 3x^2$$

*

**Ejercicio Nº 88**

$$y = \ell^{\sqrt[3]{x^2-1}} = \ell^{(x^2-1)^{1/3}}$$

$$y' = \ell^{(x^2-1)^{1/3}} \cdot \frac{1}{3}(x^2 - 1)^{-2/3} \;.\; 2x$$

$$y' = \frac{2\,\ell^{\sqrt[3]{x^2-1}} \;.\; x}{3\,\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}$$

**Ejercicio Nº 89**

$$y = \ell^{ax}$$

$$y' = \ell^{ax} \;.\; a = a\,\ell^{ax}$$

**Ejercicio Nº 90**

$$y = \ell^{Lx}$$

$$y' = \ell^{Lx}\frac{1}{x} = \frac{\ell^{Lx}}{x}$$

**Ejercicio Nº 91**

$$y = \ell^{sen\,x}$$

$$y' = \ell^{sen\,x} \;.\; \cos x$$

**Ejercicio Nº 92**

$y = \sqrt{\ell^3}$ (Es todo una constante)

$$y' = 0$$



**Ejercicio Nº 93**

$$y = \sqrt{\ell^{x^2}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ell^{x^2}}}\;\ell^{x^2} \;.\; 2x = \frac{2x\,\ell^{x^2}}{2\sqrt{\ell^{x^2}}}$$

$$y' = \frac{x \;.\; \ell^{x^2}}{(\ell^{x^2})^{1/2}} = x \;.\; (\ell^{x^2})^{1/2} = x\sqrt{\ell^{x^2}}$$

**Ejercicio Nº 94**

$$y = \ell^{KL\sqrt{x}}$$

$$y' = \ell^{K.L\sqrt{x}} \;.\; K\,\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{K\,\ell^{K.L\sqrt{x}}}{2x}$$

**Ejercicio Nº 95**

$$y = \ell^{sen\,Lx}$$

$$y' = \ell^{sen\,Lx} \;.\; \cos Lx \;.\; \frac{1}{x} = \frac{\ell^{sen\,Lx} \;.\; \cos Lx}{x}$$

**Ejercicio Nº 96**

$$y = arc\;sen\;\ell^{2x}$$

Recuérdese que la derivada de $y = arc\;sen\,x$, es $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ∴ en este caso particular,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\ell^{2x})^2}} \;.\; \ell^{2x} \;.\; 2 = \frac{2\,\ell^{2x}}{\sqrt{1-\ell^{4x}}}$$

*

**Ejercicio Nº 97**

$y = arc\ sen\ L\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(L\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\,x\sqrt{1-L^2\sqrt{x}}}$$

**Ejercicio Nº 98**

$y = arc\ sen\sqrt{Lx}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{Lx})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{Lx}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2\,x\sqrt{Lx}\sqrt{1-Lx}}$$

**Ejercicio Nº 99**

$y = arc\ sen\ sen\ x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(sen\ x)^2}} \cdot cos\ x = \frac{cos\ x}{\sqrt{1-sen^2\ x}}$$

**Ejercicio Nº 100**

$y = arc\ sen\ \frac{x}{\ell^x}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{x}{\ell^x})^2}} \cdot \frac{\ell^x - x\,.\,\ell^x}{(\ell^x)^2}$$

$$y' = \frac{\ell^x\,(1-x)}{\sqrt{1-\frac{x^2}{\ell^{2x}}}\ .\ \ell^{2x}} = \frac{1-x}{\sqrt{\frac{\ell^{2x}-x^2}{\ell^{2x}}}\ .\ \ell^x}$$

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{\frac{\ell^{2x}-x^2}{\ell^x}}\ .\ \ell^x} = \frac{1-x}{\sqrt{\ell^{2x}-x^2}}$$



**Ejercicio Nº 101**

$y = arc\ cos\ \frac{\ell^x}{8}$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{\ell^x}{8})^2}} \cdot \frac{\ell^x}{8} = \frac{-\ \ell^x}{8\sqrt{1-\frac{\ell^{2x}}{64}}}$$

$$y' = \frac{-\ \ell^x}{8\sqrt{\frac{64-\ell^{2x}}{64}}} = \frac{-\ \ell^x}{\sqrt{64-\ell^{2x}}}$$

**Ejercicio Nº 102**

$y = arc\ cos\ L\,x$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(Lx)^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x\sqrt{1-L^2x}}$$

**Ejercicio Nº 103**

$y = arc\ cos\ a^x$

$$y' = \frac{-1}{\sqrt{1-(a^x)^2}} \cdot a^x\,La = \frac{-a^x\,La}{\sqrt{1-a^{2x}}}$$

**Ejercicio Nº 104**

$y = arc\ tg\ x^2$

$$y' = \frac{1}{1+(x^2)^2} \cdot 2\,x = \frac{2x}{1+x^4}$$

**Ejercicio Nº 105**

$y = arc\ tg\sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,.(1+x)}$$

**Ejercicio Nº 106**

$y = arc\ tg\ L\, x^2$

$$y' = \frac{1}{1+(Lx^2)^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x\,(1+L^2\,x^2)}$$

**Ejercicio Nº 107**

$y = arc\ tg\ \ell^x$

$$y' = \frac{1}{1+(\ell^x)^2} \cdot \ell^x = \frac{\ell^x}{1+\ell^{2x}}$$

**Ejercicio Nº 108**

$y = arc\ tg\ sen\, x^2$

$$y' = \frac{1}{1+(sen\, x^2)^2} \cdot cos\, x^2 \ .\ 2x = \frac{2\,x\, cos\, x^2}{1+sen^2\, x^2}$$

**Ejercicio Nº 109**

$y = arc\ tg\ \pi$

$y' = 0$ Puesto que la función $y = arc\ tg\ \pi$ es una constante y su derivada vale $0$.

**Ejercicio Nº 110**

$y = arc\ tg\ \pi^x$



$$y' = \frac{1}{1+(\pi^x)^2} \cdot \pi^x\, L\pi = \frac{\pi^x\, L\pi}{1+\pi^{2x}}$$

**Ejercicio Nº 111**

$y = arc\ cotg\ x^\pi$

$$y' = \frac{-1}{1+(x^\pi)^2} \cdot \pi\, x^{\pi-1} = \frac{-\pi\, x^{\pi-1}}{1+x^{2\pi}}$$

**Ejercicio Nº 112**

$y = arc\ cotg\ L\, x$

$$y' = \frac{-1}{1+(L\,x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{x\,(1+L^2 x)}$$

**Ejercicio Nº 113**

$y = arc\ cotg\ \frac{x^2}{\pi}$

$$y' = \frac{-1}{1+(\frac{x^2}{\pi})^2} \cdot \frac{2x}{\pi} = \frac{-2x}{\pi\,(1+\frac{x^4}{\pi^2})} = \frac{-2x}{\pi\,(\frac{\pi^2+x^4}{\pi^2})} = \frac{-2x}{\frac{\pi^2+x^4}{\pi}}$$

$$y' = \frac{-2\pi x}{\pi^2+x^4}$$

**Ejercicio Nº 114**

$y = arc\ cotg\ x^n$

$$y' = \frac{-1}{1+(x^n)^2} \cdot n\,.\,x^{n-1} = \frac{-n\,x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

*

**Ejercicio Nº 115**

$$y = arc\ sec\ x^2$$

$$y' = \frac{1}{x^2 \sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{2}{x\sqrt{x^4 - 1}}$$

**Ejercicio Nº 116**

$$y = arc\ sec\ e^x$$

$$y' = \frac{1}{e^x \sqrt{(e^x)^2 - 1}} \cdot e^x = \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

**Ejercicio Nº 117**

$$y = arc\ sec\ L\sqrt{x}$$

$$y' = \frac{1}{L\sqrt{x}\ \sqrt{(L\sqrt{x})^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{1}{2x\,L\sqrt{x}\ \sqrt{L^2\sqrt{x} - 1}}$$

**Ejercicio Nº 118**

$$y = arc\ cosec\ 2x$$

$$y' = \frac{-1}{2x\sqrt{4x^2 - 1}} \cdot 2 = \frac{-1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

**Ejercicio Nº 119**

$$y = arc\ cosec\ L\,x$$

$$y' = \frac{-1}{L\,x\sqrt{L^2 x - 1}} \cdot \frac{1}{x}$$



**Ejercicio Nº 120**

$$y = arc\ cosec\ e^x$$

$$y' = \frac{-1}{e^x\ \sqrt{(e^x)^2 - 1}} \cdot e^x = \frac{-1}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

**Ejercicio Nº 121**

$y = Sh\,x$ que se lee seno hiperbólico de $x$; esta función es igual a $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$;
su derivada va a ser igual a $(Sh\,x)' = (\frac{e^x - e^{-x}}{2})' = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
Si recordamos que $Ch\,x$ (coseno hiperbólico de $x$) es igual a $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$; deducimos que la derivada de $Sh\,x = Ch\,x$

Recapitulando,

$$y = Sh\,x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$y' = \frac{e^x - (-e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = Ch\,x$$

De la misma manera sacaremos la derivada de $y = Ch\,x$

$$y = Ch\,x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$y' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = Sh\,x$$

Es decir que la derivada de una de las funciones mencionadas es la otra, con la ventaja de que en las mismas no hay cambio de signo como existían en las derivadas de las cofunciones trigonométricas, directas o inversas.

**Ejercicio Nº 122**

$$y = Sh\,Lx$$

$$y' = Ch\,Lx \cdot \frac{1}{x} = \frac{Ch\,Lx}{x}$$

**Ejercicio Nº 123**

$y = Sh\, \ell^x$

$$y' = Ch\, \ell^x \,.\, \ell^x = \ell^x \,.\, Ch\, \ell^x$$

**Ejercicio Nº 124**

$y = Sh \sqrt{x}$

$$y' = Ch \sqrt{x} \,.\, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{Ch\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

**Ejercicio Nº 125**

$y = Sh\, a^x$

$$y' = Ch\, a^x \,.\, a^x\, L\, a$$

**Ejercicio Nº 126**

$y = Ch \sqrt{x}$

$$y' = Sh \sqrt{x} \,.\, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{Sh\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

**Ejercicio Nº 127**

$y = Ch\, \ell^{2x}$

$$y' = Sh\, \ell^{2x} \,.\, \ell^{2x} \,.\, 2 = 2\,\ell^{2x} \,.\, Sh\, \ell^{2x}$$

**Ejercicio Nº 128**

$y = Ch\, L \sqrt{x}$



$$y' = Sh\, L\sqrt{x} \,.\, \frac{1}{\sqrt{x}} \,.\, \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{Sh\, L\sqrt{x}}{2x}$$

**Ejercicio Nº 129**

$y = Tg\,h\,x = \dfrac{Sh\,x}{Ch\,x}$.

$$y' = \frac{(Sh\,x)'\,Ch\,x - Sh\,x\,(Ch\,x)'}{(Ch\,x)^2} = \frac{Ch^2\,x - Sh^2\,x}{Ch^2\,x} \qquad (1)$$

Si hacemos el cociente indicado en (1) nos queda que,

$$y' = 1 - Tg\,h^2\,x$$

Otro resultado es resolviendo el numerador de (1)

$$Ch^2\,x - Sh^2\,x = \left(\frac{\ell^x + \ell^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\ell^x - \ell^{-x}}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{(\ell^x)^2 + 2\,\ell^x\,\ell^{-x} + (\ell^{-x})^2}{4} - \frac{(\ell^x)^2 - 2\ell^x\,\ell^{-x} + (\ell^{-x})^2}{4} =$$

$$= \frac{\ell^{2x} + 2\,\ell^0 + \ell^{-2x}}{4} - \frac{\ell^{2x} - 2\,\ell^0 + \ell^{-2x}}{4} =$$

$$= \frac{\ell^{2x} + 2\,\ell^0 + \ell^{-2x} - (\ell^{2x} - 2\,\ell^0 + \ell^{-2x})}{4} =$$

$$= \frac{\ell^{2x} + 2 + \ell^{-2x} - \ell^{2x} + 2 - \ell^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

En una palabra, $Ch^2\,x - Sh^2\,x = 1$ *(2)*. Reemplazando este valor en (1) nos queda que, $y' = \dfrac{1}{Ch^2\,x} = Sec\,h^2\,x$. La fórmula $Ch^2\,x - Sh^2 x = 1$, es el equivalente de $sen^2\,x + cos^2\,x = 1$

**Ejercicio Nº 130**

$y = Tg\,h\,2x$

$$y' = sec\,h^2\,2x \,.\, 2 = 2\,sec\,h^2\,2x$$

**Ejercicio Nº 131**

$y = Tgh\sqrt{2x}$

$$y' = sec\,h^2\sqrt{2x}\ .\ \frac{1}{2\sqrt{2x}}\ .\ 2 = \frac{sec\,h^2\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$$

**Ejercicio Nº 132**

$y = tg\,h^2\,\ell^x = (tg\,h\,\ell^x)^2$

$$y' = 2\ .\ tg\,h\,\ell^x\ .\ sec\,h^2\,\ell^x\ .\ \ell^x$$

**Ejercicio Nº 133**

$y = \sqrt[3]{tg\,h\,L\,3x} = (tg\,h\,L\,3x)^{1/3}$

$$y' = \frac{1}{3}\,(tg\,h\,L\,3x)^{-2/3}\ .\ sec\,h^2\,L\,3x\ .\ \frac{1}{\not 3x}\ .\ \not 3$$

$$y' = \frac{sec\,h^2\,L\,3x}{3x\sqrt[3]{tg\,h^2\,L\,3x}}$$

**Ejercicio Nº 134**

$y = tg\,h\,8$ (Es una constante $= \frac{\ell^8 - \ell^{-8}}{\ell^8 + \ell^{-8}}$)

$$y' = 0$$

**Ejercicio Nº 135**

$y = cotg\,h\,x = \frac{cos\,h\,x}{sen\,h\,x}$

$$y' = \frac{(cos\,h\,x)'\,sen\,h\,x - cos\,h\,x\ .\ (sen\,h\,x)'}{(sen\,h\,x)^2} =$$



$$y' = \frac{(sen\,h\,x)^2 - (cos\,h\,x)^2}{(sen\,h\,x)^2} = 1 - cotg\,h^2\,x$$

o también $y' = \frac{-1}{sen\,h^2\,x} = -cosec\,h^2\,x$

$$y = cotg\,h\,3x$$

$$y' = -cosec\,h^2\,3x\ .\ 3 = -3\,cosec\,h^2\,3x$$

**Ejercicio Nº 136**

$y = cotg\,h^2\,2x = (cotg\,h\,2x)^2$

$$y' = 2\ .\ cotg\,h\,2x\ .\ (-cosec\,h^2\,2x)\ .\ 2$$

$$y' = -4\,cotg\,h\,2x\ .\ cosec\,h^2\ .\ 2x$$

**Ejercicio Nº 137**

$y = \sqrt{cotg\,h\,n\,x}$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{cotg\,h\,n\,x}}\ .\ (-cosec\,h^2\,n\,x)\ .\ n$$

$$y' = \frac{-n\,cosec\,h^2\,nx}{2\sqrt{cotg\,h\,n\,x}}$$

**Ejercicio Nº 138**

$y = cotg\,h\,\ell^x$

$$y' = -cosec\,h^2\,\ell^x\ .\ \ell^x$$

**Ejercicio Nº 139**

$y = cotg\,h^3\,L\,x = (cotg\,h\,L\,x)^3$

$$y' = 3\,(cotg\,h\,L\,x)^2 \;.\; (-\,cosec\,h^2\,L\,x)\,.\,\frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{-\,3 \;.\; cotg\,h^2\,L\,x \;.\; cosec\,h^2\,L\,x}{x}$$

**Ejercicio Nº 140**

$$y = sec\,h\,x = \frac{1}{cos\,h\,x}$$

$$y' = \frac{-\,sen\,h\,x}{(cos\,h\,x)^2} = -\frac{senh\,x}{cos\,h\,x \;.\; cos\,h\,x} = -\,tg\,h\,x \;.\; sec\,h\,x$$

**Ejercicio Nº 141**

$$y = sec\,h\,2\,x$$

$$y' = -\,tg\,h\,2\,x \;.\; sec\,h\,2\,x \;.\; 2 = -\,2\,tg\,h\,2\,x \;.\; sec\,h\,2\,x$$

**Ejercicio Nº 142**

$$y = sec\,h^2\,3\,x = (sec\,h\,3\,x)^2$$

$$y' = 2\,(sec\,h\,3\,x) \;.\; (-\,tg\,h\,3\,x) \;.\; (sec\,h\,3\,x) \;.\; 3$$

$$y' = -\,6\,sec\,h^2\,3\,x \;.\; tg\,h\,3x$$

**Ejercicio Nº 143**

$$y = \sqrt[3]{sec\,h\,2\,x^2} = (sec\,h\,2\,x^2)^{1/3}$$

$$y' = \frac{1}{3}\,(sec\,h\,2\,x^2)^{-2/3} \;.\; (-\,tg\,h\,2\,x^2)\;(sec\,h\,2\,x^2) \;.\; 4x$$

$$y' = \frac{-4x}{3}\,\sqrt[3]{sec\,h\,2\,x^2} \;.\; (tg\,h\,2\,x^2)$$



**Ejercicio Nº 144**

$$y = cosec\,h\,x = \frac{1}{sen\,h\,x}$$

$$y' = \frac{-cos\,h\,x}{sen\,h^2\,x} = \frac{-\,cos\,h\,x}{sen\,h\,x \;.\; sen\,h\,x} = -\,cotg\,h\,x \;.\; cosec\,h\,x$$

**Ejercicio Nº 145**

$$y = cosec\,h\,e^x$$

$$y' = -\,cotg\,h\,e^x \;.\; cosec\,h\,e^x \;.\; e^x$$

**Ejercicio Nº 146**

$$y = cosec\,h\,L\,x$$

$$y' = \frac{-\,cotg\,h\,L\,x \;.\; cosec\,h\,L\,x}{x}$$

**Ejercicio Nº 147**

$$y = \sqrt[4]{cosec\,h\,\sqrt{2x}} = (cosec\,h\,\sqrt{2x})^{1/4}$$

$$y' = \frac{1}{4}\,(cosec\,h\,\sqrt{2x})^{-3/4} \;.\; (-\,cosec\,h\,\sqrt{2x})\;(cotg\,h\,\sqrt{2x}) \;.\; \frac{1}{2\,\sqrt{2x}} \;.\; 2$$

$$y' = -\,\frac{1}{4}\,(cosec\,h\,\sqrt{2x})^{1/4} \;.\; cotg\,h\,\sqrt{2x} \;.\; \frac{1}{\sqrt{2x}}$$

$$y' = \frac{-\,\sqrt[4]{cosec\,h\,\sqrt{2x}}\;\; cotg\,h\,\sqrt{2x}}{4\,\sqrt{2x}}$$

**Ejercicio Nº 148**

$$y = Arg\,sen\,h\,x$$

Se lee $y$ es igual al *argumento* del seno hiperbólico de $x$; es la función inversa a la del seno hiperbólico de $x$

Por lo tanto,

$$x = sen\,h\,y \qquad (1)$$

Por definición de derivada de la función inversa,

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)}$$

$$\therefore \qquad y'(x) = \frac{1}{cos\,h\,y} \qquad (2)$$

Pero, por lo visto en el ejercicio 129,

$$cos\,h^2\,y - sen\,h^2\,y = 1 \;\therefore$$

$$(3) \qquad cos\,h^2\,y = sen\,h^2\,y + 1 \;\therefore\; cos\,h\,y = \sqrt{sen\,h^2\,y + 1}$$

Reemplazando (3) en (2) nos queda,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{sen\,h^2 y + 1}}$$

Por último, en esta última reemplazamos el valor de (1) y nos queda,

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

### Ejercicio Nº 149

$$y = Arg\,Sh\,\ell^x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(\ell^x)^2 + 1}} \cdot \ell^x = \frac{\ell^x}{\sqrt{\ell^{2x} + 1}}$$

### Ejercicio Nº 150

$$y = (Arg\,Sh\,L\,x)^2$$



$$y' = 2\,.\,Arg\,Sh\,L\,x \cdot \frac{1}{\sqrt{(Lx)^2 + 1}} \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = \frac{2\,Arg\,Sh\,L\,x}{x\sqrt{L^2x + 1}}$$

### Ejercicio Nº 151

$$y = \sqrt[3]{Arg\,Sh^2\,2x^3} = (Arg\,Sh\,2\,x^3)^{2/3}$$

$$y' = \frac{2}{3}(Arg\,Sh\,2\,x^3)^{-1/3} \cdot \frac{1}{\sqrt{(2x^3)^2 + 1}} \cdot 6x^2$$

$$y' = \frac{12\,x^2}{3\sqrt[3]{Arg\,Sh\,2\,x^3}\;\sqrt{4x^6 + 1}}$$

### Ejercicio Nº 152

$$y = Arg\,Sh\;\ell^{x^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(\ell^{x^2})^2 + 1}} \cdot \ell^{x^2} \cdot 2x = \frac{2\,\ell^{x^2}\,.\,x}{\sqrt{\ell^{2x^2} + 1}}$$

### Ejercicio Nº 154

$y = Arg\,Ch\,x$ Es la función inversa a la función coseno hiperbólico de $x$,

Por lo tanto,

$$x = Ch\,y \;\therefore$$

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{Sh\,y} \qquad (1)$$

Pero, $\quad cos\,h^2 y - sen^2 y = 1 \;\therefore\; cos\,h^2 y - 1 = sen\,h^2 y \;\therefore$

$$sen\,h\,y = \sqrt{cos\,h^2\,y - 1} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) nos queda, $y' = \dfrac{1}{\sqrt{\cos h^2 y - 1}}$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

**Ejercicio Nº 155**

$y \;=\; Arg\, Ch\, x^2$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(x^2)^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{2x}{\sqrt{x^4 - 1}}$$

**Ejercicio Nº 156**

$y \;=\; Arg\, Ch\, e^x$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(e^x)^2 - 1}} \cdot e^x = \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$$

**Ejercicio Nº 157**

$y \;=\; Arg\, Ch\, Lx$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{(Lx)^2 - 1}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\sqrt{L^2 x - 1}}$$

**Ejercicio Nº 158**

$y \;=\; Arg\, Tg\, h\, x \quad \therefore$

$$x \;=\; Tg\, h\, y$$

$$y' = \frac{1}{(Tg\, h\, y)'} = \frac{1}{1 - Tg\, h^2\, y}$$ (Ver Ejercicio Nº 129)



$$y' = \frac{1}{1 - x^2}$$

**Ejercicio Nº 159**

$y \;=\; Arg\, Tg\, h \sqrt{x}$

$$y' = \frac{1}{1 - (\sqrt{x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\,(1 - x)}$$

**Ejercicio Nº 160**

$y \;=\; Arg\, Tg\, h\, e^x$

$$y' = \frac{1}{1 - (e^x)^2} \cdot e^x = \frac{e^x}{1 - e^{2x}}$$

**Ejercicio Nº 161**

$y \;=\; Arg\, Tg\, Lx$

$$y' = \frac{1}{1 - (Lx)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x\,(1 - L^2 x)}$$

Con estos ejercicios, se han aplicado prácticamente todas las reglas de derivación vistos en la tabla de derivadas.
Pero existen algunas funciones que directamente no se pueden calcular sus derivadas, sino que previamente hay que tomar logaritmos naturales y luego derivar en la forma vista al demostrarse la derivada de $y = x^n$ (Nº 11 de la tabla de derivadas).
Por ejemplo,

**Ejercicio Nº 162**

$y \;=\; x^x$ (función potencial - exponencial)

Es muy importante decir que la base y el exponente son dos variables, y su derivada no se puede calcular aplicando las reglas 11 ó 12.
Para calcular la derivada se toman logaritmos naturales primero

$Ly = Lx^x = x\,L\,x$

Luego se deriva en cada miembro separadamente,

$$\frac{y'}{y} = 1\ .\ Lx + x\ .\frac{1}{x} = Lx + 1$$

$$y' = y\,(1 + Lx)$$

$$y' = x^x\,(1 + Lx)$$

**Ejercicio Nº 163**

$y = x^{1/x}$

$$Ly = \frac{1}{x}\,Lx = x^{-1}\,Lx$$

$$\frac{y'}{y} = -x^{-2}\ .\ Lx + x^{-1}\frac{1}{x} = -\frac{Lx}{x^2} + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = y\,(-\frac{Lx}{x^2} + \frac{1}{x^2}) = \frac{x^{1/x}}{x^2}\,(1 - Lx)$$

**Ejercicio Nº 164**

$y = (Lx)^{\ell^x}$

$$Ly = \ell^x\,L\,L\,x$$

$$\frac{y'}{y} = (\ell^x)'\ L\,L\,x + \ell^x\ (L\,L\,x)'$$

$$y' = y\ (\ell^x\,L\,L\,x + \ell^x\ .\frac{1}{Lx}\ .\frac{1}{x})$$

$$y' = (Lx)^{\ell^x}\ \ell^x\ (L\,L\,x + \frac{1}{x\,L\,x})$$

*



**Ejercicio Nº 165**

$y = (sen\,x)^{sen\,x}$

$$Ly = sen\,x\,L\,sen\,x$$

$$\frac{y'}{y} = cos\,x\,L\,sen\,x + sen\,x\ .\frac{1}{sen\,x}.\ cos\,x$$

$$y' = y\,(cos\,x\,L\,sen\,x + cos\,x)$$

$$y' = (sen\,x)^{sen\,x}\ cos\,x\,(L\,sen\,x + 1)$$

**Ejercicio Nº 166**

$y = x^{\sqrt{x}}$

$$Ly = \sqrt{x}\,L\,x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,Lx + \sqrt{x}\ .\frac{1}{x}$$

$$y' = y\ (\frac{1}{2\sqrt{x}}\,Lx + \frac{1}{\sqrt{x}})$$

$$y' = \frac{x^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\ (\frac{1}{2}\,Lx + 1)$$

**Ejercicio Nº 167**

$y = (\frac{n}{x})^x$

$$Ly = x\ .\ L\frac{n}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = L\frac{n}{x} + x\ .\frac{x}{n}.\ (-\frac{n}{x^2})$$

$$\frac{y'}{y} = L\frac{n}{x} - 1$$

$$y' = y\,(L\frac{n}{x} - 1)$$

$$y' = (\frac{n}{x})^x\;(L\frac{n}{x} - 1)$$

**Ejercicio Nº 168**

$$y = x^{x^x} = x^{(x^x)}$$

$$Ly = (x^x)\; Lx$$

$$\frac{y'}{y} = (x^x)'\; Lx + x^x\;.\;(Lx)' \qquad (1)$$

Pero $(x^x)' = x^x\;(1 + Lx)$ por ejercicio Nº 162
Reemplazando este valor en (1) y operando nos queda,

$$\frac{y'}{y} = x^x\;(1 + Lx)\; Lx + x^x\frac{1}{x}$$

$$y' = y\;[x^x\;(1 + Lx)\; Lx + x^{x-1}]$$

$$y' = x^{x^x}\;[x^x\;(1 + Lx)\; Lx + x^{x-1}]$$

**Ejercicio Nº 169**

$$y = sen\,x\;.\;cos\,x$$

$$Ly = L\,sen\,x\;.\;cos\,x = L\,sen\,x + L\,cos\,x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{sen\,x}\;.\;cos\,x + \frac{1}{cos\,x}\;(-\,sen\,x)$$

$$y' = y\;[\frac{cos\,x}{sen\,x} - \frac{sen\,x}{cos\,x}] = sen\,x\;.\;cos\,x\;[\frac{cos\,x}{sen\,x} - \frac{sen\,x}{cos\,x}]$$



$$y' = cos^2\,x - sen^2\,x$$

Obsérvese que en este caso si hubiéramos derivado aplicando la regla 4, tenemos,

$$y' = (sen\,x)'\;cos + sen\,x\;(cos\,x)' = cos\,x\,cos\,x + sen\,x\,(-\,sen\,x)$$

$$y' = cos^2\,x - sen^2\,x$$

Es decir que derivando directamente, o aplicando el método logarítmico —cuando el mismo es viable) se deben obtener los mismos resultados.

**Ejercicio Nº 170**

Calcular la derivada de $y = tg\,x$ por el método logarítmico,

$$y = tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$$

$$Ly = L\,sen\,x - L\,cos\,x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{sen\,x}\;.\;cos\,x - \frac{1}{cos\,x}\;.\;(-\,sen\,x)$$

$$y' = y\;[\frac{cos\,x}{sen\,x} + \frac{sen\,x}{cos\,x}]$$

$y' = \frac{sen\,x}{cos\,x}\;[\frac{cos\,x}{sen\,x} + \frac{sen\,x}{cos\,x}]$ haciendo operaciones,

$$y' = 1 + \frac{sen^2\,x}{cos^2\,x} = 1 + tg^2\,x$$

o también $y' = \frac{cos^2\,x + sen^2\,x}{cos^2\,x} = \frac{1}{cos^2\,x} = sec^2\,x$

**Ejercicio Nº 171**

$y = cotg\,x = \frac{cos\,x}{sen\,x}$ por el método logarítmico

$$Ly = L\cos x - L\,sen\,x$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{\cos x}(-sen\,x) - \frac{1}{sen\,x}\cdot \cos x$$

$$y' = y\left(-\frac{sen\,x}{\cos x} - \frac{\cos x}{sen\,x}\right)$$

$$y' = \frac{\cos x}{sen\,x}\left(-\frac{sen\,x}{\cos x} - \frac{\cos x}{sen\,x}\right)$$ haciendo operaciones

$$y' = -1 - \frac{\cos^2 x}{sen^2 x} = -1 - cotg^2 x$$

o también, $y' = \dfrac{-sen^2 x - \cos^2 x}{sen^2 x} = \dfrac{-1}{sen^2 x} = -cosec^2 x$

**Ejercicio Nº 172**

$$y = sec\,x = \frac{1}{\cos x}$$

$$Ly = L\,1 - L\cos x = 0 - L\cos x = -L\cos x$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{\cos x}(-sen\,x) = tg\,x$$

$$y' = y\,.\,tg\,x = sec\,x\,.\,tg\,x$$

**Ejercicio Nº 173**

$$y = cosec\,x = \frac{1}{sen\,x}$$

$$Ly = L\,1 - L\,sen\,x = -L\,sen\,x$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{sen\,x}\cdot \cos x = -cotg\,x$$



$$y' = y\,.\,(-cotg\,x)$$

$$y' = -cosec\,x\,.\,cotg\,x$$

**Ejercicio Nº 174**

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$Ly = \frac{1}{x}\cdot L\frac{1}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot L\frac{1}{x} + \frac{1}{x}\cdot x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$y' = y\,.\,\left[\left(-\frac{1}{x^2}\right)L\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right]$$

$$y' = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(L\frac{1}{x} - 1\right)$$

**Ejercicio Nº 175**

$$y = x^{sen\,x}$$

$$Ly = sen\,x\,L\,x$$

$$\frac{y'}{y} = \cos x\,L\,x + sen\,x\,.\,\frac{1}{x}$$

$$y' = x^{sen\,x}\left(\cos x\,L\,x + \frac{sen\,x}{x}\right)$$

**Ejercicio Nº 176**

$$y = (sen\,x)^{tg\,x}$$

$$Ly = tg\,x\,L\,sen\,x$$

$$\frac{y'}{y} = sec^2\, x\, L\, sen\, x \;+\; tg\, x \;.\; \frac{1}{sen\, x} \;.\; cos\, x$$

$$y' = y\;\left(sec^2 x\, L\, sen\, x \;+\; \frac{sen\, x}{cos\, x} \;.\; \frac{1}{sen\, x} \;.\; cos\, x\right)$$

$$y' = (sen\, x)^{tg\, x}\;\left(sec^2 x\, L\, sen\, x \;+\; 1\right)$$

*

Como se ha visto hasta ahora la derivación es una operación relativamente sencilla, mecánica, siempre es posible calcular la derivada de una función por más complicada que sea ésta; lo único que hay que tener en cuenta son los principios vistos (derivada de una función de función; método logarítmico; y por sobre todo, recordar bien la tabla de derivadas).

### Ejercicio Nº 177

Calcular la derivada de $cos\, x$ como una función de función. Debemos recordar que $cos\, x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ o sea el coseno de un ángulo cualquiera es igual al seno del ángulo complementario.

Ej.,

$$cos\, 30^\circ = sen\,(90 - 30) = sen\, 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \therefore$$

$$y = cos\, x = sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$y' = \left[sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]' = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\left(\frac{\pi}{2} - x\right)'$$

$$y' = cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(0 - 1) = -cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \qquad (1)$$

$$y' = -sen\, x$$

Pero en (1) se puede aplicar $cos\,(\alpha - \beta) = cos\,\alpha\, cos\,\beta + sen\,\alpha\, sen\,\beta$, o sea que

$$y' = -\left[cos\frac{\pi}{2}\, cos\, x \;+\; sen\,\frac{\pi}{2}\, sen\, x\right]$$



$$y' = -\,[\,0 \;.\; cos\, x \;+\; 1 \;.\; sen\, x\,] = -\,sen\, x$$

### Ejercicio Nº 178

$$y = arc\, sen\; -x^2 - \sqrt{1 - x^2}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^4}} \;.\; (-2x) \;-\; \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \;.\; (-2x)$$

$$y' = \frac{-2\, x}{\sqrt{1 - x^4}} + \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

### Ejercicio Nº 179

$$y = \frac{u\, v}{w}$$ (Siendo $u$, $v$, $w$, funciones de $x$ )

$$y' = \frac{(u\, v)'\, w - (u\, v)\, w'}{w^2} = \frac{(u'v \;+\; u\, v')\, w \;-\; (u\, v)\, w'}{w^2}$$

$$y' = \frac{u'\, v\, w \;+\; u\, v'\, w \;-\; u\, v\, w'}{w^2}$$ o también,

$$y' = \frac{u'\, v\, w}{w^2} + \frac{u\, v'\, w}{w^2} - \frac{u\, v\, w'}{w^2}$$

$$y' = \frac{u'\, v}{w} + \frac{u\, v'}{w} - \frac{u\, v\, w'}{w^2}$$

### Ejercicio Nº 180

Apliquemos la regla del ejercicio anterior en este caso,

$$y = \frac{sen\, 2\, x \;.\; L\, x^2}{cos\, 3\, x}$$

Hacemos, $u = sen\, 2\, x \quad \therefore \quad u' = 2\, cos\, 2\, x$

$v = L\, x^2 \quad \therefore \quad v' = \frac{1}{x^2} \;.\; 2\, x = \frac{2}{x}$

$$w = \cos 3x \quad \therefore \quad w' = -3 \,\text{sen}\, 3x$$

Por lo tanto,

$$y' = \frac{2\cos 2x \;.\; L\,x^2}{\cos 3x} + \frac{\frac{2}{x}\,\text{sen}\, 2x}{\cos 3x} - \frac{\text{sen}\, 2x \;.\; L\,x^2 .\,(-3\,\text{sen}\, 3x)}{\cos^2 3x}$$

$$y' = \frac{2\cos 2x\, L\,x^2}{\cos 3x} + \frac{2\,\text{sen}\, 2x}{x \,.\, \cos 3x} + \frac{3\,\text{sen}\, 2x\, L\,x^2\, \text{sen}\, 3x}{\cos^2 3x}$$

**Ejercicio Nº 181**

$$y = \frac{u}{v \,.\, w} \qquad \text{(Siendo } u, v, w, \text{ funciones de } x)$$

$$y' = \frac{u'(vw) - u(vw)'}{(vw)^2} = \frac{u'v\,w - u(v'w + v\,w')}{(v\,w)^2}$$

$$y' = \frac{u'v\,w - u\,v'w - u\,v\,w'}{(v\,w)^2} = \frac{u'v\,w}{v^2w^2} - \frac{u\,v'w}{v^2w^2} - \frac{u\,v\,w'}{v^2w^2}$$

$$y' = \frac{u'}{v\,w} - \frac{u\,v'}{v^2\,w} - \frac{u\,w'}{v\,w^2}$$

**Ejercicio Nº 182**

$$y = \frac{\ell^{2x}}{\cos x \;.\; \text{sen}\, 2x}$$

Apliquemos la regla del ejercicio anterior, para lo cual hacemos,

$$u = \ell^{2x} \quad \therefore \quad u' = 2\,\ell^{2x}$$

$$v = \cos x \quad \therefore \quad v' = -\,\text{sen}\, x$$

$$w = \text{sen}\, 2x \quad \therefore \quad w' = 2\cos 2x$$

$$y' = \frac{2\,\ell^{2x}}{\cos x\, \text{sen}\, 2x} + \frac{\ell^{2x} \;.\; \text{sen}\, x}{\cos^2 x \;.\; \text{sen}\, 2x} - \frac{2\,\ell^{2x}\; \cos 2x}{\cos x \;.\; \text{sen}^2\, 2x}$$

*



**Ejercicio Nº 183**

$$y = 3^{x^2-4} + L^2 \sqrt{3x}$$

$$y' = 3^{x^2-4}\, L\,3 \;.\; (2x) + 2\,L\sqrt{3x} \;.\; \frac{1}{\sqrt{3x}} \;.\; \frac{1}{2\sqrt{3x}} \;.\; 3$$

$$y' = 2x \;.\; 3^{x^2-4}\, L\,3 + \frac{L\,\sqrt{3x}}{x}$$

**Ejercicio Nº 184**

$$y = \log_b \sqrt{3x^a}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3x^a}} \;.\; \log_b \ell \;.\; \frac{1}{2\sqrt{3x^a}} \;.\; 3\,a\,x^{a-1}$$

$$y' = \frac{3\,a\,x^{a-1}\; \log_b \ell}{2 \,.\, 3\,x^a} = \frac{a\,x^{a-1}\; \log_b \ell}{2\,x^a}$$

**Ejercicio Nº 185**

$$y = \text{arc tg}\, L\, \text{sen}\, 2x$$

$$D\, \text{arc tg}\, L\, \text{sen}\, 2x =$$

$$= \frac{1}{1 + (L\, \text{sen}\, 2x)^2} \;.\; D\,L\, \text{sen}\, 2x =$$

$$= \frac{1}{1 + L^2\, \text{sen}\, 2x} \;.\; \frac{1}{\text{sen}\, 2x} \;.\; D\, \text{sen}\, 2x =$$

$$= \frac{1}{1 + L^2\, \text{sen}\, 2x} \;.\; \frac{1}{\text{sen}\, 2x} \;.\; \cos 2x \;.\; D\,2x =$$

$$= \frac{1}{1 + L^2\, \text{sen}\, 2x} \;.\; \frac{1}{\text{sen}\, 2x} \;.\; \cos 2x \;.\; 2\,D\,x =$$

$$= \frac{1}{1 + L^2\, \text{sen}\, 2x} \;.\; \frac{1}{\text{sen}\, 2x} \;.\; \cos 2x \;.\; 2 \;.\; 1 \qquad (1)$$

Se deja constancia que $D$ en cada paso significa lo que hay que derivar; obsérvese como la $D$ se ha ido corriendo paulatinamente de izquierda a derecha; es lo que se llama la regla del "corrimiento de la D".
En (1) podemos hacer operaciones, $\therefore$

$$y' = \frac{2 \cot g\ 2x}{1 + L^2 \operatorname{sen}^2 x}$$

**Ejercicio Nº 186**

$$y = x^{\ell^x}$$

$$Ly = \ell^x\ Lx$$

$$\frac{y'}{y} = \ell^x \frac{1}{x} + \ell^x\ Lx = \ell^x \left(\frac{1}{x} + Lx\right)$$

$$y' = x^{\ell^x}\ \ell^x \left(\frac{1}{x} + Lx\right)$$

**Ejercicio Nº 187**

$$y = L^2 x + Lx^2$$

$$y' = 2Lx \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \cdot 2x$$

$$y' = \frac{2Lx}{x} + \frac{2}{x} = \frac{2}{x}(Lx + 1)$$

**Ejercicio Nº 188**

$$y = tg^4\ (3x^2 - \pi) + L^4 \sec 2x$$

$$y' = 4\, tg^3(3x^2 - \pi) \cdot \sec^2(3x^2 - \pi) \cdot 6x + 4L^3 \sec 2x \cdot \frac{1}{\sec 2x} \cdot \sec 2x\ tg 2x \cdot 2$$

$$y' = 24x\ tg^3(3x^2 - \pi) \sec^2(3x^2 - \pi) + 8L^3 \sec 2x \cdot tg\ 2x$$



**Ejercicio Nº 189**

$$y = \operatorname{arc\ cosec}(x^2 - 1)$$

$$y' = \frac{-1}{(x^2 - 1)\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1}} \cdot 2x = \frac{-2x}{(x^2 - 1)\sqrt{(x^2 - 1)^2 - 1}}$$

**Ejercicio Nº 190**

$$y = \cos^{\ell} 3x^2 = (\cos 3x^2)^{\ell}$$

$$y' = \ell(\cos 3x^2)^{\ell - 1} \cdot (-\operatorname{sen} 3x^2) \cdot 6x$$

$$y' = -6\ell x \cdot (\cos 3x^2)^{\ell - 1} \operatorname{sen} 3x^2$$

**Ejercicio Nº 191**

$$y = L^2 \left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right) = \left[L\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)\right]^2$$

$$y' = 2L\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right) \cdot \frac{x}{2x^2 - 1} \cdot \frac{4x \cdot x - (2x^2 - 1)}{x^2}$$

$$y' = 2L\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right) \cdot \frac{x}{2x^2 - 1} \cdot \frac{4x^2 - 2x^2 + 1}{x^2}$$

$$y' = \frac{2(2x^2 + 1)}{x(2x^2 - 1)}\ L\left(\frac{2x^2 - 1}{x}\right)$$

**Ejercicio Nº 192**

$$y = L\sqrt{1 - x^3}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^3}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 - x^3}} \cdot (-3x^2) = \frac{-3x^2}{2(1 - x^3)}$$

*

**Ejercicio Nº 193**

$$y = L\,\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$y' = \frac{1-x^2}{1+x^2} \cdot \frac{2x(1-x^2)-(1+x^2)(-2x)}{(1-x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{2x - 2x^3 + 2x + 2x^3}{1-x^2} =$$

$$y' = \frac{4x}{(1+x^2)(1-x^2)} = \frac{4x}{1-(x^2)^2} = \frac{4x}{1-x^4}$$

**Ejercicio Nº 194**

$$y = (b+x)^{b+x}$$

$$Ly = (b+x) \,.\, L(b+x)$$

$$\frac{y'}{y} = L(b+x) + (b+x) \,.\, \frac{1}{b+x}$$

$$y' = y\,[L(b+x)+1] = (b+x)^{b+x} \,.\, [L(b+x)+1]$$

**Ejercicio Nº 195**

$$y = arc\ sen\ sen\ x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-(sen\,x)^2}} \,.\, cos\,x = \frac{cos\,x}{\sqrt{1-sen^2 x}} = \frac{cos\,x}{\sqrt{cos^2 x}}$$

$$= \frac{cos\,x}{cos\,x} = 1$$

**Ejercicio Nº 196**

$$y = \pi^{sen^2 x}$$



$$y' = \pi^{sen^2 x}\, L\,\pi \,.\, 2\,sen\,x\,cos\,x \qquad (1)$$

Recuérdese que $sen\,2x = sen\,(x+x) = 2\,sen\,x\,cos\,x \qquad (2)$

Reemplazando (2) en (1),

$$y' = \pi^{sen^2 x} \,.\, sen\,2x \,.\, L\,\pi$$

**Ejercicio Nº 197**

$$y = (sen\,45°)^{L\,x^2}$$

$$y' = (sen\,45°)^{Lx^2} \,.\, L\,sen\,45° \,.\, \frac{1}{x^2} \,.\, 2x$$

$$y' = \frac{2}{x}\,(sen\,45°)^{Lx^2}\ L\,sen\,45°$$

**Ejercicio Nº 198**

Calcular la derivada de $y = \sqrt{x}$ por medio de la derivada inversa.

$$y = \sqrt{x} \quad \therefore \quad x = y^2$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Verificar este resultado con los resultados obtenidos en los ejercicios Nº 25 y 34

**Ejercicio Nº 199**

$$y = L\,\frac{x}{1+x}$$

$$y' = \frac{1+x}{x} \cdot \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{x(1+x)}$$

*

**Ejercicio Nº 200**

$$y = L\,\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$$

$$y' = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}\cdot\frac{(1+2x)(1-x+x^2)-(1+x+x^2)(-1+2x)}{(1-x+x^2)^2}$$

$$y' = \frac{1-x+x^2+2x-2x^2+2x^3-(-1+2x-x+2x^2-x^2+2x^3)}{1-x+x^2+x-x^2+x^3+x^2-x^3+x^4}$$

$$y' = \frac{\cancel{1}-\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{2}x-2x^2+2\cancel{x^3}+1-2\cancel{x}+x-2\cancel{x^2}+\cancel{x^2}-2\cancel{x^3}}{1-\cancel{x}+\cancel{x^2}+\cancel{x}-\cancel{x^2}+\cancel{x^3}+x^2-\cancel{x^3}+x^4}$$

$$y' = \frac{2-2x^2}{1+x^2+x^4} = \frac{2(1-x^2)}{1+x^2+x^4}$$

**Ejercicio Nº 201**

$$y = L\,\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}-1}\cdot\frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x\,[\sqrt{x^2+1}+1]-[\sqrt{x^2+1}-1]\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x}{(\sqrt{x^2+1}+1)^{\cancel{2}}}$$

$$y' = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}[\sqrt{x^2+1}+1]-[\sqrt{x^2+1}-1]\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1}-1)\,(\sqrt{x^2+1}+1)}$$

$$y' = \frac{x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-x+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2-1^2} = \frac{\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1-1} = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = \frac{2}{x\sqrt{x^2+1}}$$

**Ejercicio Nº 202**

$$y = L\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}$$



$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}}\cdot\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+\sqrt{a})-(\sqrt{x}-\sqrt{a})\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\,\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}}\cdot\frac{\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})^2}$$

$$y' = \frac{1}{2(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\cdot\frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})} = \frac{\sqrt{\frac{a}{x}}}{2(x-a)}$$

$$y' = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{x}(x-a)}$$

**Ejercicio Nº 203**

Calcular la derivada de $y = Lx$ por la derivada de su función inversa.

$$y = Lx \quad \therefore \quad x = \ell^y$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{(\ell^y)'} = \frac{1}{\ell^y} = \frac{1}{x}$$

**Ejercicio Nº 204**

Calcular la derivada de $y = \ell^x$ por la derivada de su función inversa.

$$y = \ell^x$$

$$x = Ly$$

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\frac{1}{y}} = y = \ell^x$$

**Ejercicio Nº 205**

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

$$Ly = g(x) \, . \, L f(x)$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \, . \, L f(x) + g(x) \, . \, \frac{1}{f(x)} \, . \, f'(x)$$

$$y' = y \, [g'(x) \, . \, L f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \, . \, f'(x)]$$

$$y' = [f(x)]^{g(x)} \, [g'(x) \, L f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \, . \, f'(x)]$$

Esta derivada es el caso general de la derivada de una función elevada a una potencia que es otra función.

**Ejercicio Nº 206**

$$y = (sen\, x)^{tg\, x}$$

Por aplicación de la regla del ejercicio anterior nos queda,

$$y' = (sen\, x)^{tg\, x} \, [sec^2 x \, L \, sen\, x + \frac{tg\, x}{sen\, x} \, . \, cos\, x]$$

$$y' = (sen\, x)^{tg\, x} \, [sec^2 x \, L \, sen\, x + 1]$$

Verifíquese este resultado con el obtenido en el ejercicio Nº 176.

*



# APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

## I – Rectas tangente y normal

Como se ha explicado en algún ejercicio anterior, la derivada de una función en un punto de la misma es igual a la tangente trigonométrica del ángulo formado por la recta tangente a la función en dicho punto y el sentido positivo del eje de las $x$ (Ver demostración de la derivada de $y = c$ en la tabla de derivadas). La definición dada nos va a permitir trazar las rectas tangente y normal (perpendicular) a una función dada en uno de sus puntos.

**Ejercicio Nº 207**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = 2x^2 + 2$ en el punto $x_1 = 2$.

Previamente a la resolución del problema debemos recapitular lo siguiente:

1. la ecuación del haz (conjunto) de rectas que pasan por punto, es $y - y_1 = a(x - x_1)$, en donde $a$ (coeficiente angular de la recta) nos va a dar las infinitas rectas que pasan por el punto elegido, de acuerdo a los infinitos valores que le asignemos al valor $a$.
2. la ecuación de la recta tangente es igual a $y - y_1 = y'(x - x_1)$, (1) en donde $(x_1/y_1)$ son las coordenadas del punto dado, e $y'$ es la derivada de la función en el punto dado.

Para la resolución del problema debemos conocer primero $y_1$; su búsqueda es muy fácil: se reemplaza en la ecuación de la curva el valor de $x_1 = 2$, y obtenemos $y_1 = 2 \, . \, 2^2 + 2 = 10$.

Ahora sacamos la derivada de la función $y = 2x^2 + 2 \therefore y' = 4x$, que es otra función pero cuando $x_1 = 2$, $y' = 4 \, . \, 2 = 8$ que es igual a la tangente trigonométrica del ángulo formado por la recta tangente a la función en el punto dado y el sentido positivo del eje $x$; en una palabra es el coeficiente angular de la recta buscada. Reemplazando los valores hallados en (1) tenemos $y - 10 = 8(x - 2)$

$$y - 10 = 8x - 16 \quad \therefore \quad y = 8x - 16 + 10$$

$y = 8x - 6$ ecuación de la recta tangente buscada.

Para la ecuación normal, debemos tener presente que dos rectas son perpendiculares cuando los coeficientes angulares sean inversos y de signos contrarios; por lo tanto la ecuación normal va a ser $y - y_1 = \frac{-1}{y'}(x - x_1)$

En el caso que tenemos,

$$y - 10 = -\frac{1}{8}(x - 2) = -\frac{x}{8} + \frac{2}{8}$$

$$y = -\frac{x}{8} + \frac{2}{8} + 10$$

$$y = -\frac{x}{8} + \frac{41}{4} \quad \text{ecuación de la normal}$$

**Ejercicio Nº 208**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = -4x^2 + 2x$ en $x_1 = 0$

$$y_1 = -4 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0 = 0 \quad \therefore \quad A \equiv (0/0)$$

$$y' = -8x + 2 \quad \therefore \quad [y']_{x=0} = -8 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$y - 0 = 2(x - 0) \quad \therefore \quad y = 2x \quad \text{recta tangente}$$

$$y - 0 = -\frac{1}{2}(x - 0) \quad \therefore \quad y = -\frac{1}{2}x \quad \text{recta normal}$$

**Ejercicio Nº 209**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal de la función $y = \frac{1}{x}$ en $x_1 = 2$

$$y_1 = \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad A \equiv (2/\frac{1}{2})$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \therefore \quad y' = -\frac{1}{x^2} \quad \therefore \quad [y']_{x=2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x - 2) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$$



$$y = -\frac{1}{4}x + 1 \quad \text{recta tangente}$$

$$y - \frac{1}{2} = 4(x - 2) = 4x - 8$$

$$y = 4x - 8 + \frac{1}{2}$$

$$y = 4x - \frac{15}{2} \quad \text{recta normal}$$

**Ejercicio Nº 210**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y = \frac{1}{x^2}$ en $x_1 = -3$

$$y_1 = \frac{1}{x_1^2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9} \quad \therefore \quad A \equiv (-3/\frac{1}{9})$$

$$y = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \therefore \quad y' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$$

$$[y']_{x=-3} = \frac{-2}{(-3)^3} = \frac{-2}{-27} = \frac{2}{27}$$

$$y - \frac{1}{9} = \frac{2}{27}(x + 3) = \frac{2}{27}x + \frac{6}{27}$$

$$y = \frac{2}{27}x + \frac{6}{27} + \frac{1}{9} = \frac{2}{27}x + \frac{2}{9} + \frac{1}{9}$$

$$y = \frac{2}{27}x + \frac{3}{9} \quad \text{recta tangente}$$

$$y - \frac{1}{9} = \frac{-27}{2}(x + 3) = \frac{-27}{2}x - \frac{81}{2}$$

$$y = -\frac{27}{2}x - \frac{81}{2} + \frac{1}{9}$$

$$y = -\frac{27}{2}x - \frac{727}{18} \quad \text{recta normal}$$

## Ejercicio Nº 211

Dada la curva $y = 2x^3 - 3x + 1$ hallar:

a) Inclinación en el punto $x = 2$

b) puntos en que las rectas tangentes son paralelas a la recta $2x + 3y - 1 = 0$

c) puntos en que las rectas tangentes son perpendiculares a la recta $2y + 3y = 0$

d) puntos en que las tangentes son horizontales.

Como primera medida vamos a sacar la derivada de la función dada que es $y' = 6x^2 - 3$. Ahora entremos a cada problema en particular.

a) Este problema consiste en determinar la inclinación en el punto de la curva cuya abcisa vale 2, ó dicho en otras palabras, qué ángulo forma la recta tangente a la función en dicho punto y el sentido positivo del eje $x$, para lo cual reemplazamos en la $y'$ el valor $x = 2 \therefore y' = 6 \cdot 2^2 - 3 = 21 \therefore tg\,\alpha = 21$; buscando en la tabla respectiva nos queda que,

$$\alpha \cong 82°16'$$

b) Puntos en que las rectas tangentes son paralelas a la recta $2x + 3y - 1 = 0$: En este problema no sabemos en qué punto de la curva ocurrirá el enunciado del problema (ni sabemos si puede o no ocurrir). Pero sabemos que la derivada de la función es $y' = 6x^2 - 3$; y también que la(s) tangente(s) tienen que ser paralelas a la recta $2x + 3y - 1 = 0$ o sea que tienen que tener el mismo coeficiente angular o sea: $2x + 3y - 1 = 0 \quad \therefore$

$$3y = -2x + 1 \quad \therefore \quad y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$$

En una palabra, debe ser $6x^2 - 3 = -\frac{2}{3}$ tenemos una ecuación de 2do. grado que la resolvemos así:

$$6x^2 = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{-2+9}{3} = \frac{7}{3}$$

$$x^2 = \frac{7}{18} \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{7}{18}}$$

Es decir en los puntos cuyas abcisas son $x_1 = \sqrt{\frac{7}{18}}$, $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{18}}$, las rectas tangentes son paralelas a la recta dada.

Si queremos determinar ahora las ecuaciones de las rectas debemos hacer:



$$y_1 = 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{18}}\right)^3 - 3\left(\sqrt{\frac{7}{18}}\right) + 1$$

$$y_2 = 2\left(-\sqrt{\frac{7}{18}}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{\frac{7}{18}}\right) + 1$$

Luego,

$$y - y_1 = -\frac{2}{3}\left(x - \sqrt{\frac{7}{18}}\right)$$

$$y - y_2 = -\frac{2}{3}\left(x + \sqrt{\frac{7}{18}}\right)$$

c) Puntos en que las rectas tangentes son perpendiculares a la recta $2y + 3x = 0$
Es un problema similar al anterior, pero referido a rectas perpendiculares a la recta dada.
O sea, $2y + 3x = 0 \therefore 2y = -3x \therefore y = -\frac{3}{2}x \quad (1)$

La recta dada tiene $-\frac{3}{2}$ de coeficiente angular; las rectas perpendiculares deben tener necesariamente coeficiente angular igual a $+\frac{2}{3} \therefore$

$$6x^2 - 3 = \frac{2}{3} \quad \therefore \quad 6x^2 = \frac{2}{3} + 3 = \frac{11}{3} \quad \therefore$$

$$x^2 = \frac{11}{18} \quad \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{11}{18}}\,; \quad x_1 = \sqrt{\frac{11}{18}}\,; \quad x_2 = -\sqrt{\frac{11}{18}}$$

Es decir, en los puntos de la curva cuyas abcisas son $x_1 = \sqrt{\frac{11}{18}}$; $x_2 = -\sqrt{\frac{11}{18}}$ las rectas tangentes son perpendiculares a la recta dada.

Si queremos determinar ahora las ecuaciones de las rectas debemos hacer:

$$y_1 = 2\left(\sqrt{\frac{11}{18}}\right)^3 - 3\left(\sqrt{\frac{11}{18}}\right) + 1$$

$$y_2 = 2\left(-\sqrt{\frac{11}{18}}\right)^3 - 3\left(-\sqrt{\frac{11}{18}}\right) + 1$$

Con los valores hallados $y_1, y_2$ los aplicamos en

$$y - y_1 = \frac{2}{3}\left(x - \sqrt{\frac{11}{18}}\right)$$

$$y - y_2 = \frac{2}{3}\left(x + \sqrt{\frac{11}{18}}\right)$$

d) Puntos en que las tangentes son horizontales. Si las tangentes son horizontales, son paralelas al eje $x$, es decir, forman con éste un ángulo nulo, o sea de $0°$; por lo tanto $y' = tg\, 0° = 0 \quad \therefore$

$$6x^2 - 3 = 0 \quad \therefore \quad 6x^2 = 3 \quad \therefore \quad x^2 = \frac{1}{2} \therefore \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Es decir, en los puntos de la curva cuyas abcisas son $x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ las rectas tangentes son horizontales, o sea paralela al eje $x$, si queremos determinar ahora las ecuaciones de las rectas debemos hacer:

$$y_1 = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$$

$$y_2 = 2\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 1$$

Con los valores hallados $y_1$ e $y_2$ los aplicamos en las ecuaciones de las rectas que pasan por 1 punto, pero en este caso el coeficiente angular es igual a $0$, por lo que

$$y - y_1 = 0 \quad \therefore \quad y = y_1$$

$$y - y_2 = 0 \quad \therefore \quad y = y_2$$

**Ejercicio Nº 212**

Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2 + 2x - 1$, que forma un ángulo de $45°$ con el eje $x$

Si $\quad y = x^2 + 2x - 1 \quad \therefore \quad y' = 2x + 2$

Si la recta debe formar un ángulo de 45°, debe tener un coeficiente angular igual a $1$ ($tg\, 45° = 1$), por lo que $2x + 2 = 1 \quad \therefore \quad 2x = -1 \quad \therefore \quad x = -\frac{1}{2}$.

Es decir en el punto de la parábola cuya abcisa $x = -\frac{1}{2}$ se cumple la condición dada.

Para hallar la ecuación de la recta procedemos,

$$y_1 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = \frac{1}{4} - 1 - 1 = -\frac{7}{4} \quad \therefore \quad M \equiv \left(-\frac{1}{2} \mid -\frac{7}{4}\right)$$



$$y + \frac{7}{4} = 1\left(x + \frac{1}{2}\right) = x + \frac{1}{2} \quad \therefore \quad y = x + \frac{1}{2} - \frac{7}{4} \quad \therefore$$

$$y = x - \frac{5}{4} \quad \text{ecuación de la recta buscada}$$

**Ejercicio Nº 213**

Determinar en qué puntos de la curva $y = \frac{x}{1 - x^2}$ la tangente tiene una inclinación de 135°.

$$y' = \frac{1 \cdot (1 - x^2) - x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = tg\, 135° = -1 \quad \therefore$$

$$\frac{(1 - x^2) + 2x^2}{(1 - x^2)^2} = -1 = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$$

$$\frac{1 + x^2}{1 - 2x^2 + x^4} = -1 \quad \therefore \quad 1 + x^2 = -1 + 2x^2 - x^4 \quad \therefore$$

$$x^4 - 2x^2 + 1 + 1 + x^2 = 0 \quad \therefore \quad x^4 - x^2 + 2 = 0$$

Si hacemos $t = x^2$ ; nos queda $t^2 - t + 2 = 0 \quad \therefore$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{7i}}{2}$$

Es decir, $\quad x = \pm\sqrt{t} = \pm\sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{7i}}{2}}$

Es decir, la condición dada se cumple en puntos imaginarios, o sea que realmente nunca se cumple, o dicho en otras palabras, no hay ninguna recta tangente a la función dada que forma un ángulo de 135° con el eje $x$.

**Ejercicio Nº 214**

Ecuación de las recta tangente y normal a la curva $y = \frac{x + 1}{x - 1}$ en el punto $x_1 = -1$

$$y_1 = \frac{-1+1}{-1-1} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \therefore \quad A \equiv (-1 \mid 0)$$

$$y' = \frac{1.(x-1)-(x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

$$[y']_{x=-1} = \frac{-2}{(-1-1)^2} = \frac{-2}{(-2)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$y - y_1 = y'(x-x_1) \quad \therefore \quad y - 0 = -\frac{1}{2}(x+1) = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$$

$y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}$ recta tangente

$$y - y_1 = -\frac{1}{y'}(x-x_1) \quad \therefore \quad y-0 = 2(x+1) = 2x + 2$$

$y = 2x + 2$ recta normal

**Ejercicio Nº 215**

Determinar la ecuación de las rectas tangente a la parabola $y = 2px^2$ en el punto $A \equiv (x_1 \mid y_1)$

El problema consiste en determinar la ecuación de la recta mencionada a un punto de la parábola. Recordemos que la parábola $y = 2px^2$ tiene el vértice en el origen $V \equiv (0/0)$, es de eje vertical que coincide con el eje $y$.
El problema es muy sencillo, para lo cual hacemos:

$$y' = 4px \quad \therefore \quad [y']_{x=x_1} = [4px]_{x=x_1} = 4px_1$$

$$y - y_1 = y'(x-x_1)$$

$$y - y_1 = 4px_1(x-x_1) = 4px_1x - 4px_1^2$$

$$y = 4px_1x - 4px_1^2 + y_1 \qquad (1)$$

Pero $y = 2px^2$ $\therefore$ si el punto dado pertenece a la parábola debe ser:



$$y_1 = 2px_1^2 \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) nos queda,

$$y = 4px_1x - 4px_1^2 + 2px_1^2$$

$$y = 4px_1x - 2px_1^2$$

$y = 2px_1(2x - x_1)$ ecuación de la recta tangente

**Ejercicio Nº 216**

Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = 8x^2$ en el punto $y \equiv (1/8)$. (El punto pertenece a la parábola pués $8 = 8 \ . \ 1^2 = 8$). Por aplicación del ejercicio anterior quedaría

$$y = 2px_1(2x-x_1); \text{ pero } 2p = 8; \ x_1 = 1 \quad \therefore$$

$$y = 8 \ . \ 1(2x-1) = 8(2x-1) = 16x-8$$

$y = 16x - 8$ recta tangente

Otra forma de encarar el problema hubiera sido directamente; entonces:

$$y' = 16x \quad \therefore \quad [y']_{x_1} = 16 \ . \ x_1 =$$

$$= 16 \ . \ 1 = 16$$

$$y - 8 = 16(x-1) = 16x - 16 \quad \therefore \quad y = 16x - 16 + 8 \quad \therefore$$

$$y = 16x - 8$$

**Ejercicio Nº 217**

Determinar la ecuación de la recta tangente a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$. (Es una circunferencia con centro en el origen) $\therefore$

$$y^2 = r^2 - x^2 \therefore y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (1) \therefore$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (0 - 2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} \therefore$$

$$[y']_{x = x_1} = \frac{-x_1}{\sqrt{r^2 - x_1^2}} \quad (2)$$

Pero si el punto pertenece a la circunferencia, en (1) debe ocurrir

$$y_1 = \sqrt{r^2 - x_1^2} \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2) nos queda,

$$[y']_{x=x_1} = \frac{-x_1}{y_1}$$ coeficiente angular de la recta tangente a la circunferencia en el punto dado; o sea

$$y - y_1 = \frac{-x_1}{y_1}(x - x_1) \therefore y_1 (y - y_1) = -x_1 (x - x_1)$$

$$y_1 y - y_1^2 = -x_1 x + x_1^2 \therefore y_1 y + x_1 x = y_1^2 + x_1^2 \quad (4)$$

Pero $y_1^2 + x_1^2 = r^2 \therefore y_1 y + x_1 x = r^2$

Si queremos sacar la ecuación de la recta normal, hacemos

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1) \therefore x_1 y - x_1 y_1 = y_1 x - y_1 x_1 \therefore$$

$$x_1 y = y_1 x \therefore y = \frac{y_1}{x_1} x$$ recta normal

Es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

### Ejercicio Nº 218

Determinar la ecuación de las rectas tangente y normal a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ en el punto $A_1 \equiv (3/4)$.
El punto $A_1$ pertenece a la circunferencia pués se cumple $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Aplicando las fórmulas del ejercicio anterior nos queda,



$3x + 4y = 25$ recta tangente

$y = \frac{4}{3} x$ recta normal

### Ejercicio Nº 219

Idem anterior al punto $A_2 \equiv (-3/4)$

$-3x + 4y = 25$ recta tangente

$y = \frac{4}{-3} x = -\frac{4}{3} x$ recta normal

### Ejercicio Nº 220

Idem anterior al punto $A_3 \equiv (4/-3)$

$4x - 3y = 25$ recta tangente

$y = \frac{-3}{4} x$ recta normal

### Ejercicio Nº 221

Idem anterior al punto $A_4 \equiv (2/4)$

En los casos anteriores, los puntos dados en todos los casos pertenecían a la circunferencia; en este caso no, por lo que no es de aplicación las fórmulas anteriores. En una palabra, previo a la resolución del problema debe determinarse si el punto pertenece efectivamente al lugar geométrico; si ello no ocurre, el ejercicio no puede resolverse por causas obvias.

### Ejercicio Nº 222

Determinar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, en un

punto de la misma $A \equiv (x_1/y_1)$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \therefore \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \therefore$$

$$y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2) \therefore y=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)} \therefore$$

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ (1) \therefore y'=\frac{b}{a}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(0-2x)$$

$$y'=\frac{-bx}{a\sqrt{a^2-x^2}} \therefore [y']_{x=x_1}=\frac{-bx_1}{a\sqrt{a^2-x_1^2}}\quad(2)$$

Pero en (1) podemos hacer $\frac{ya}{b}=\sqrt{a^2-x^2}$, y también $\frac{y_1a}{b}=\sqrt{a^2-x_1^2}\ (3)$ (por pertenecer el punto a la elipse).

Reemplazando (3) en (2) nos queda,

$$[y']_{x=x_1}=\frac{-bx_1}{a\frac{y_1\cdot a}{b}}=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}$$

Coeficiente angular de la recta tangente.

Por lo que la recta tangente quedará,

$$y-y_1=\frac{-b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1)$$

$$(y-y_1)a^2y_1=-b^2x_1(x-x_1) \therefore$$

$$ya^2y_1-y_1^2a^2=-b^2x_1x+b^2x_1^2 \therefore$$

$$ya^2y_1+b^2x_1x=y_1^2a^2+x_1^2b^2 \therefore$$

Dividiendo ambos miembros por $a^2b^2$ nos queda,

$$\frac{ya^2y_1}{a^2b^2}+\frac{b^2x_1x}{a^2b^2}=\frac{y_1^2a^2}{a^2b^2}+\frac{x_1^2b^2}{a^2b^2} \therefore$$

$$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{x_1x}{a^2}=\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{x_1^2}{a^2}\quad(4)$$



Pero si el punto A pertenece a la elipse debe ser,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1\quad(5)\quad\therefore$$

$$\frac{yy_1}{b^2}+\frac{xx_1}{a^2}=1$$

Ecuación de la recta tangente a una elipse con centro en el origen, en uno de sus puntos.

Si se hubiera querido deducir la ecuación de la normal hubiéramos hecho:

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1) \therefore$$

$$yb^2x_1-y_1b^2x_1=a^2y_1x-a^2y_1x_1 \therefore$$

$$yb^2x_1=a^2y_1x+y_1b^2x_1-a^2y_1x_1$$

$$yb^2x_1=a^2y_1x+y_1x_1(b^2-a^2)$$

$$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}x+\frac{y_1x_1(b^2-a^2)}{b^2x_1}$$

$$y=\frac{a^2x_1}{b^2x_1}x+\frac{y_1(b^2-a^2)}{b^2}$$

$$y=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}x+\left(y_1-\frac{y_1a^2}{b^2}\right)$$

$\frac{a^2y_1}{b^2x_1}$ es el coeficiente angular de la recta,

y $\left(y_1-\frac{y_1a^2}{b^2}\right)$ la ordenada al origen.

Obsérvese que es más fácil recordar la ecuación de la recta tangente que la normal, pués aquélla guarda similitud con la de la ecuación de la elipse.

*

## Ejercicio Nº 223

Determinar las ecuaciones de las rectas tangentes y normal a la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto de la misma $P \equiv (4/1,8)$

Primero verificamos si el punto pertenece a la elipse para lo cual,

$$\frac{4^2}{25} + \frac{1,8^2}{9} = \frac{16}{25} + \frac{3,24}{9} = \frac{144 + 81}{225} = \frac{225}{225} = 1$$

El punto pertenece efectivamente a la elipse. Aplicando las fórmulas del ejercicio anterior, nos queda,

$$\frac{x \ . \ 4}{25} + \frac{y \ . \ 1,8}{9} = 1 \ \therefore \ \frac{1,8\,y}{9} = 1 - \frac{4x}{25} \ \therefore$$

$$0,2\,y = -\frac{4}{25}x + 1 \ \therefore$$

$$y = \frac{-4}{25 \ . \ 0,2}x + \frac{1}{0,2} = \frac{-4}{5}x + 5$$

$$y = -0,8\,x + 5 \quad \text{recta tangente}$$

$$y = \frac{25 \ . \ 1,8}{9 \ . \ 4}x + \left(1,8 - \frac{1,8 \ . \ 25}{9}\right)$$

$$y = \frac{45}{36}x + (1,8 - 5)$$

$$y = 1,25\,x - 3,2$$

Mejor que recordar la fórmula de memoria hubiera sido: el coeficiente angular de la recta tangente es igual a $-0,8$; la perpendicular debe tener entonces

$$a = \frac{1}{0,8} = 1,25 \ \therefore$$

$$y - 1,8 = 1,25\,(x-4) = 1,25\,x - 5 \ \therefore \ y = 1,25\,x - 3,2$$

*



## Ejercicio Nº 224

Determinar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, en un punto de la misma, $P \equiv (x_1/y_1)$

El planteo y desarrollo del problema es muy similar al del Ejercicio 222.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \ \therefore \ \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2} \ \therefore$$

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2) \ \therefore \ y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \quad (1)$$

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \cdot 2x = \frac{b\,x}{a\sqrt{x^2 - a^2}} \ \therefore$$

$$[y']_{x=x_1} = \frac{b\,x_1}{a\sqrt{x_1^2 - a^2}} \quad (2)$$

Pero en (1) podemos hacer $\frac{y\,a}{b} = \sqrt{x^2 - a^2}$ (3), y también $\frac{y_1 a}{b} = \sqrt{x_1^2 - a^2}$ (4) (Por pertenecer el punto a la hipérbola). Reemplazando (4) en (2) nos queda,

$$[y']_{x=x_1} = \frac{b\,x_1}{a \ . \ \frac{y_1 a}{b}} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} \quad \text{Coeficiente angular de la recta tangente.}$$

Por lo que será, $y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1) \ \therefore$

$$y\,a^2 y_1 - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2 \ \therefore$$

$$y\,a^2 y_1 - b^2 x_1 x = a^2 y_1^2 - b^2 x_1^2$$

Dividiendo ambos miembros por $-a^2 b^2$ nos queda,

$$-\frac{y\,y_1}{b^2} + \frac{x\,x_1}{a^2} = -\frac{y_1^2}{b^2} + \frac{x_1^2}{a^2} \quad (5)$$

Pero si el punto pertenece a la hipérbola, debe ser,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \qquad (6) \qquad \therefore$$

Reemplazando (6) en (5) tenemos:

$$\frac{x\,x_1}{a^2} - \frac{y\,y_1}{b^2} = 1$$

ecuación de la recta tangente a una hipérbola con centro en el origen, en uno de sus puntos.

La normal va a ser entonces,

$$y - y_1 = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1} (x - x_1)$$

$$y b^2 x_1 - b^2 x_1 y_1 = -a^2 y_1 x + a^2 y_1 x_1$$

$$y b^2 x_1 = -a^2 y_1 x + a^2 y_1 x_1 + b^2 x_1 y_1$$

$$y b^2 x_1 = -a^2 y_1 x + y_1 x_1 (a^2 + b^2)$$

$$y = \frac{-a^2 y_1}{b^2 x_1} x + \left(\frac{y_1 a^2}{b^2} + y_1\right)$$

**Ejercicio Nº 225**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la hipérbola $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 9$ en el punto $A \equiv (5 / -2{,}25)$. El punto pertenece a la hipérbola, pués,

$$\frac{5^2}{16} - \frac{2{,}25^2}{9} =$$

$$= \frac{25}{16} - \frac{5{,}0625}{9} = \frac{225 - 81}{144} = \frac{144}{144} = 1$$

La ecuación de la tangente va a ser,

$$\frac{5\,x}{16} + \frac{2{,}25\,y}{9} = 1 \quad \therefore \quad \frac{2{,}25\,y}{9} = -\frac{5x}{16} + 1$$

$$2{,}25\,y = -\frac{45x}{16} + 9$$



$$y = -\frac{45\,x}{16\,.\,2{,}25} + \frac{9}{2{,}25} \quad \therefore \quad y = \frac{-45}{36} x + 4 = \frac{-5}{4} x + 4$$

La normal es,

$$y + 2{,}25 = \frac{4}{5}(x - 5) = \frac{4}{5} x - 4$$

$$y = \frac{4}{5} x - 6{,}25$$

**Ejercicio Nº 226**

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función $y\,x = K$ en un punto de la misma $M \equiv (x_1 / y_1)$.
Debemos recordar que la función $y\,x = K$ representa una hipérbola equilatera, cuyas asíntotas son los ejes del sistema.

$$y\,x = K \quad \therefore \quad y = \frac{K}{x} \quad \therefore \quad y' = \frac{-K}{x^2} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad [y']_{x = x_1} = \frac{-K}{x_1^2} \quad \therefore$$

$$y - y_1 = \frac{-K}{x_1^2}(x - x_1) = -\frac{K}{x_1^2} x + \frac{K\,x_1}{x_1^2} = \frac{-K}{x_1^2} x + \frac{K}{x_1}$$

$$y = \frac{-K}{x_1^2} x + \left(\frac{K}{x_1} + y_1\right) \quad \text{ecuación recta tangente}$$

La normal va a ser:

$$y - y_1 = \frac{x_1^2}{K}(x - x_1) = \frac{x_1^2}{K} x - \frac{x_1^3}{K}$$

$$y = \frac{x_1^2}{K} x - \frac{x_1^3}{K} + y_1$$

$$y = \frac{x_1^2}{K} x + \left(y_1 - \frac{x_1^3}{K}\right)$$

## Ejercicio Nº 227

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $x\,y = -1$, en $x_1 = 2$

I. – Por aplicación de las fórmulas del ejercicio anterior.

$$xy = -1 \therefore y = -\frac{1}{x} \therefore y_1 = \frac{-1}{x_1} = \frac{-1}{2}$$

$$y = \frac{-(-1)}{2^2}x + \left[\frac{-1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$y = \frac{1}{4}x - 1$$

La normal es,

$$y = \frac{4}{-1}x + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2^3}{-1}\right)$$

$$y = -4x + \left(-\frac{1}{2} + 8\right)$$

$$y = -4x + \frac{15}{2}$$

II. – Directamente.

$$xy = -1 \therefore y = \frac{-1}{x} \therefore y' = \frac{1}{x^2}$$

$$[y']_{x=x_1} = \frac{1}{4}$$

$$y + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x-2) = \frac{x}{4} - \frac{1}{2} \therefore y = \frac{x}{4} - 1 \quad \text{recta tangente}$$

$$y + \frac{1}{2} = -4\,(x-2) = -4x + 8 \therefore y = -4x + 8 - \frac{1}{2}$$

$$y = -4x + \frac{15}{2} \quad \text{recta normal}$$



## Ejercicio Nº 228

Determinar la ecuación de las rectas tangentes y normal a la función

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \quad \text{en } x = x_1$$

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}$$

$$y' = \frac{a(cx+d) - (ax+b).C}{(cx+d)^2} = \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2}$$

$$y' = \frac{ad - bc}{(cx+d)^2} \therefore [y']_{x=x_1} = \frac{(ad-bc)}{(cx_1+d)^2}$$

La recta tangente es

$$y - y_1 = \frac{ad - bc}{(cx_1+d)^2}(x - x_1)$$

La normal es,

$$y - y_1 = \frac{(cx_1+d)^2}{bc - ad}(x - x_1)$$

Recuérdese que nos hallamos en presencia de la función homográfica, que bajo ciertas restricciones $(c \neq 0;\ a\,d \neq b\,c)$ representa una hipérbola equilatera; su centro como sabemos está en

$$C \equiv \left(-\frac{d}{c} \,/\, \frac{a}{c}\right)$$

## Ejercicio Nº 229

Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la función

$$y = \frac{8x + 2}{6x - 3} \quad \text{en } x_1 = 2 \therefore$$

$$y_1 = \frac{8.2 + 2}{6.2 - 3} = \frac{16 + 2}{12 - 3} = \frac{18}{9} = 2 \therefore M \equiv (2/2)$$

$$y' = \frac{8(6x-3) - 6(8x+2)}{(6x-3)^2} = \frac{48x - 24 - 48x - 12}{(6x-3)^2} = \frac{-36}{(6x-3)^2}$$

$$[y']_{x=2} = \frac{-36}{(6 \,.\, 2 - 3)^2} = \frac{-36}{81} = \frac{-4}{9} \therefore$$

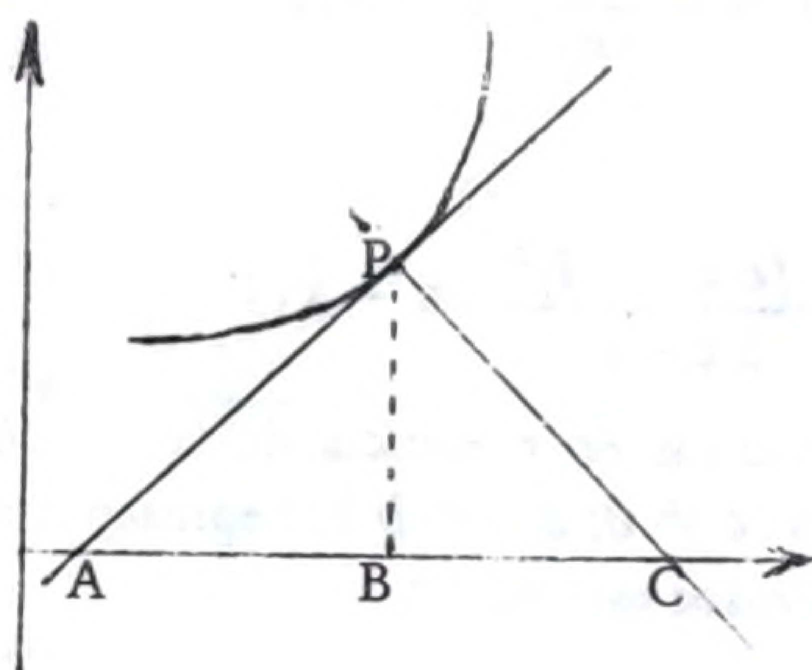
$$y - 2 = \frac{-4}{9}(x-2) = \frac{-4}{9}x + \frac{8}{9} \therefore$$

$$y = \frac{-4}{9}x + \frac{26}{9} \quad \text{recta tangente}$$

$$y - 2 = \frac{9}{4}(x-2) = \frac{9}{4}x - \frac{18}{4} \therefore \quad y = \frac{9}{4}x - \frac{18}{4} + 2$$

$$y = \frac{9}{4}x - 2{,}5 \quad \text{recta normal}$$

II. – Segmentos subtangente, subnormal, tangente y normal.




El punto $P \equiv (x_1 \,/\, y_1)$

Recordemos que el segmento subtangente es $AB$; el subnormal el $BC$; el segmento tangente es $AP$, el segmento normal es el $PC$. Abreviando nos queda:

$$St = AB; \; Sn = BC; \; t = AP; \; N = PC$$

Es muy común que los alumnos confundan principalmente los segmentos tangente y normal con las rectas tangente y normal respectivamente; pero es muy fácil distinguir unos de otros: mientras éstos son medidas de segmentos (son números), aquéllos son 2 funciones lineales.
Las fórmulas para obtener los segmentos son:

$$St = \frac{Y_1}{y'}; \quad Sn = y_1 \,.\, y'; \quad t = \frac{Y_1}{y'}\sqrt{1 + (y')^2}$$



$$N = y_1\sqrt{1 + (y')^2}$$

Debe manifestarse asimismo que los cuatro segmentos –por ser distancias– deben tomarse siempre en valor absoluto o sea, positivo, a pesar de que por efectos del cálculo puedan dar valores negativos.

## Ejercicio Nº 230

Determinar los cuatro segmentos correspondientes a la parábola $y = 2px^2$, en el punto $A \equiv (x_1 \,/\, y_1)$ (Ver ejercicio Nº 215)

$$y = 2px^2 \;\therefore\; y' = 4px \;\therefore\; [y']_{x=x_1} = 4px_1$$

$$St = \frac{Y_1}{4px_1}; \quad Sn = Y_1 \,.\, 4px_1 = 4px_1y_1;$$

$$t = \frac{Y_1}{4px_1}\sqrt{1 + 16p^2x_1^2}$$

$$N = Y_1\sqrt{1 + 16p^2x_1^2}$$

## Ejercicio Nº 231

Determinar los cuatro segmentos en el ejercicio Nº 216

$$y = 8x^2 \;\therefore\; y' = 16x \;\therefore\; [y']_{x=x_1} = 16 \,.\, 1 = 16$$

$$St = \frac{Y_1}{y'} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$Sn = Y_1 y' = 8 \,.\, 16 = 128$$

$$t = \frac{Y_1}{y'}\sqrt{1 + (y')^2} = \frac{8}{16}\sqrt{1 + 16^2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 256} = \frac{1}{2}\sqrt{257}$$

$$N = Y_1\sqrt{1 + (y')^2} = 8\sqrt{257}$$

## Ejercicio Nº 232

Determinar los cuatro segmentos correspondientes a la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ para el punto $P \equiv (x_1 \,/\, y_1)$

$$y^2 = r^2 - x^2 \quad \therefore \quad y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad \therefore \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x)$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{-x}{y} \quad \therefore \quad [y']_{x=x_1} = \frac{-x_1}{Y_1}$$

$$St = \frac{Y_1}{(\frac{-x_1}{Y_1})} = \frac{Y_1^2}{-x_1} = \frac{r^2 - x_1^2}{-x_1} = \frac{r^2}{-x_1} + 1 \quad \therefore \quad 1 - \frac{r^2}{x_1}$$

$$Sn = Y_1 \cdot y' = y_1 \cdot \frac{(-x_1)}{Y_1} = -x_1$$

$$T = \frac{Y_1}{y'} \sqrt{1 + (y')^2} = \frac{Y_1}{(\frac{-x_1}{Y_1})} \sqrt{1 + (\frac{-x_1}{Y_1})^2} = \frac{Y_1^2}{-x_1} \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{Y_1^2}} =$$

$$= \frac{Y_1^2}{-x_1} \sqrt{\frac{Y_1^2 + x_1^2}{Y_1^2}} = \frac{Y_1^2}{-x_1} \sqrt{\frac{r^2}{y_1^2}} = \frac{Y_1^2}{-x_1} \cdot \frac{r}{y_1} =$$

$$T = \frac{r\,Y_1}{-x_1}$$

$$N = Y_1 \sqrt{1 + (\frac{-x_1}{Y})^2} = Y_1 \sqrt{1 + \frac{x_1^2}{y_1^2}} = y_1 \sqrt{\frac{y_1^2 + x_1^2}{y_1^2}} =$$

$$y_1 \sqrt{\frac{r^2}{y_1{}^2}} = y_1 \cdot \frac{r}{y_1} = r$$

Si se hace la figura, se debe ver que el segmento normal debe coincidir con el radio de la circunferencia, y que el segmento subnormal debe coincidir con la abcisa del punto dado.

### Ejercicio Nº 233

Determinar los cuatro segmentos correspondientes a la circunferencia

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{en} \quad P \equiv (3 / 4)$$

$$St = \frac{Y_1^2}{-x_1} = \frac{4^2}{-3} = \frac{16}{-3}$$



Se debe tomar el valor absoluto o sea $St = \frac{16}{3}$.

$$Sn = |-x_1| = |-3| = 3$$

$$T = \left|\frac{r\,y_1}{-x_1}\right| = \left|\frac{5 \cdot 4}{-3}\right| = \frac{20}{3}$$

$$N = r = 5$$

### Ejercicio Nº 234

Idem anterior al punto $R \equiv (-3 / 4)$

$$St = \left|\frac{4^2}{-3}\right| = \frac{16}{3}$$

$$Sn = |-x_1| = |-(-3)| = 3$$

$$T = \left|\frac{r\,y_1}{-x_1}\right| = \left|\frac{5 \cdot 4}{-(-3)}\right| = \frac{20}{3}$$

$$N = r = 5$$

### Ejercicio Nº 235

Determinar los cuatro segmentos correspondientes a la elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{para} \quad P \equiv (4 / 1{,}8)$$

$$\frac{y^2}{9} = 1 - \frac{x^2}{25} = \frac{25 - x^2}{25}$$

$$y^2 = \frac{9}{25}(25 - x^2) \quad \therefore \quad y = \frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$$

$$y' = \frac{3}{5} \, \frac{1}{2\sqrt{25 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{5\sqrt{25 - x^2}}$$

$$[y']_{x=4} = \frac{-3\,.\,4}{5\sqrt{25-16}} = \frac{-3\,.\,4}{5\,.\,3} = \frac{-4}{5}$$

$$St = \left|\frac{Y_1}{y'}\right| = \left|\frac{1{,}8}{\frac{-4}{5}}\right| = \left|\frac{9}{-4}\right| = \frac{9}{4}$$

$$Sn = |\,Y_1\,.\,y'\,| = |\,1{,}8\,.\,(\frac{-4}{5})\,| = |\,\frac{-7{,}2}{5}\,| = 1{,}44$$

$$T = \frac{Y_1}{y'}\sqrt{1+(y')^2} = \left|\frac{1{,}8}{\frac{-4}{5}}\sqrt{1+(\frac{-4}{5})^2}\right| = \left|\frac{9}{-4}\sqrt{1+\frac{16}{25}}\right|$$

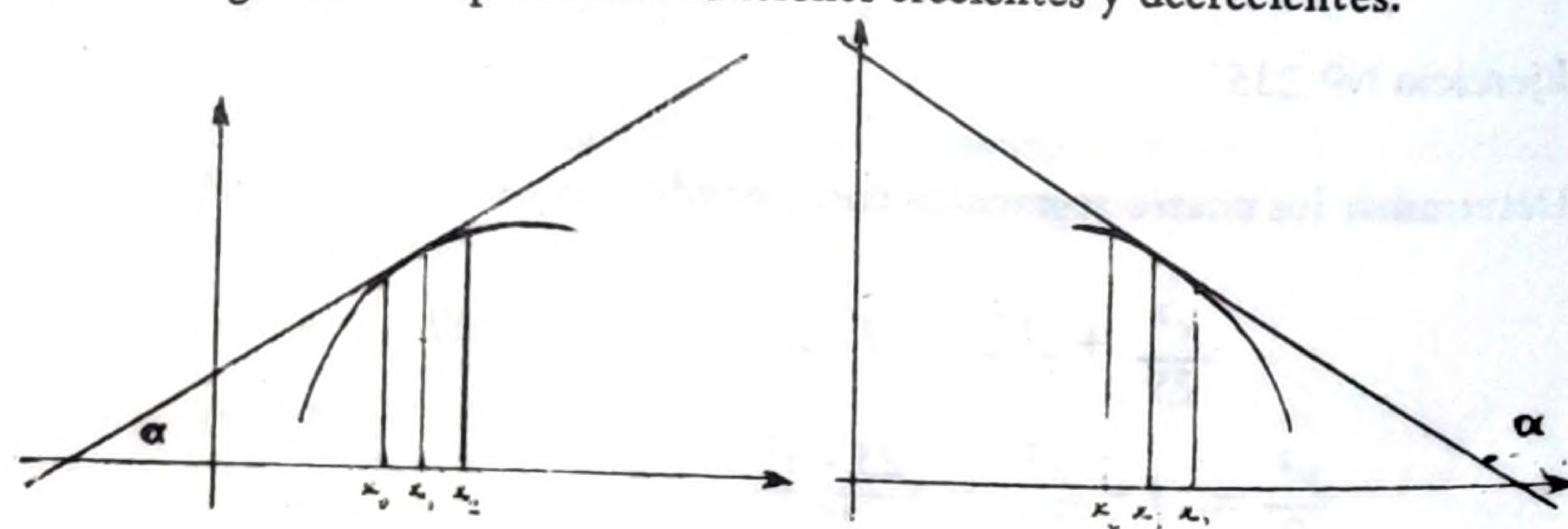
$$= \frac{9}{4}\sqrt{\frac{25+16}{25}} = \frac{9}{4\,.\,5}\sqrt{41} = \frac{9}{20}\sqrt{41}$$

$$N = Y\,.\,\sqrt{1+(y')^2} = 1{,}8\sqrt{1+(\frac{-4}{5})^2} = 1{,}8\sqrt{1+\frac{16}{25}} = 1{,}8\sqrt{\frac{41}{25}}$$

$$= \frac{1{,}8}{5}\sqrt{41}$$

III. – Máximos y Mínimos relativos

Previo a la resolución de los ejercicio relativos a los máximos y mínimos, veremos algunos conceptos sobre funciones crecientes y decrecientes.




Se dice que una función es creciente cuando se cumple que

$$f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$$

como en el caso de la función de la Fig. 1, es decir que aumenta la ordenada de la $f(x)$ cuando aumenta la abcisa. Se observa en este caso que la $f'(x)$ debe ser $> 0$. ¿Por qué? Porque en cualquiera de sus puntos la tangente a la función forma con el sentido positivo del eje x un ángulo α inferior a 90º $(0 < \alpha < 90^o)$ y como sabemos su tangente trigonométrica (o sea $y'$) es positiva. En una palabra, la derivada primera en una función creciente es positiva.



Se dice que una función es decreciente cuando se cumple $f(x_0) > f(x_1) > > f(x_2)$ como en el caso de la función de la Fig. 2, es decir que disminuye la ordenada de $f(x)$ cuando aumenta la abcisa. Se observa en este caso que la $f'(x)$ debe ser $< 0$, porque la tangente a la función forma con el sentido positivo del eje $x$, un ángulo α superior a 90º cuya tangente trigonométrica $(y')$ es negativa. Es decir la $f'(x)$ en una función decreciente es negativa.

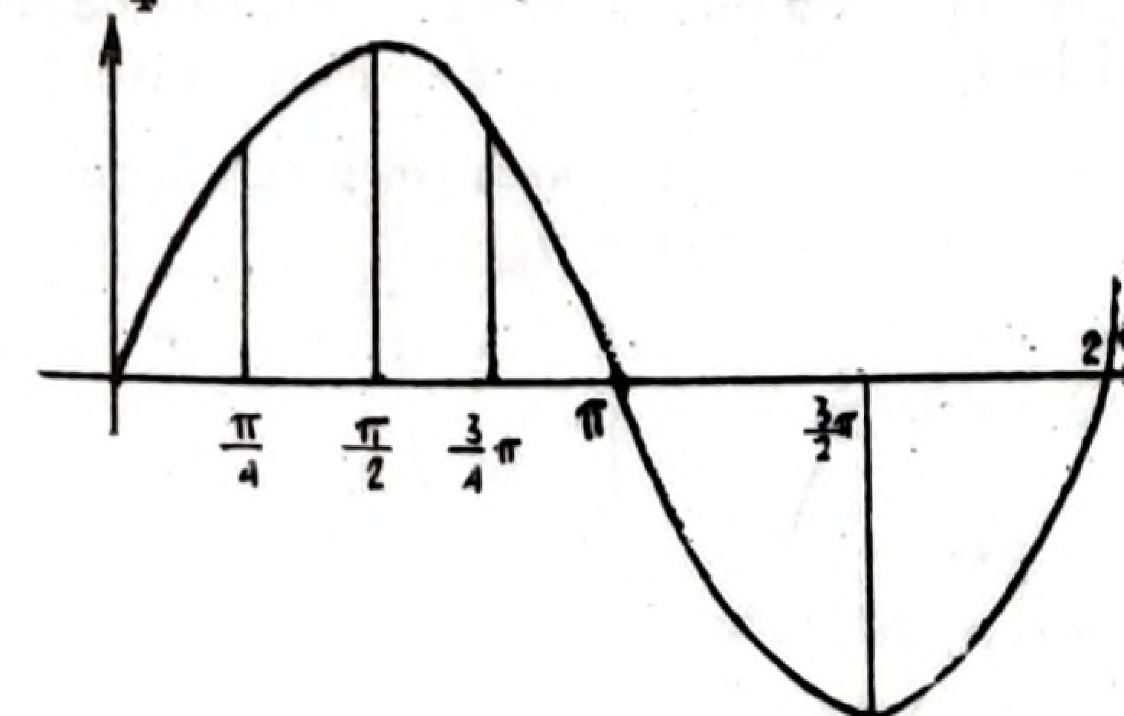
**Ejercicio Nº 236**

Determinar el crecimiento de la función $y = sen\,x$ para $x_1 = \frac{\pi}{4}$; $x_2 = = \frac{3}{4}\pi$

$$y = sen\,x \quad \therefore \quad y' = cos\,x$$

$$[y']_{x=\frac{\pi}{4}} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} > 0 \quad \text{función creciente}$$

$$[y']_{x=\frac{3}{4}\pi} = cos\frac{3}{4}\pi = \frac{-\sqrt{2}}{2} < 0 \quad \text{función decreciente}$$




**Ejercicio Nº 237**

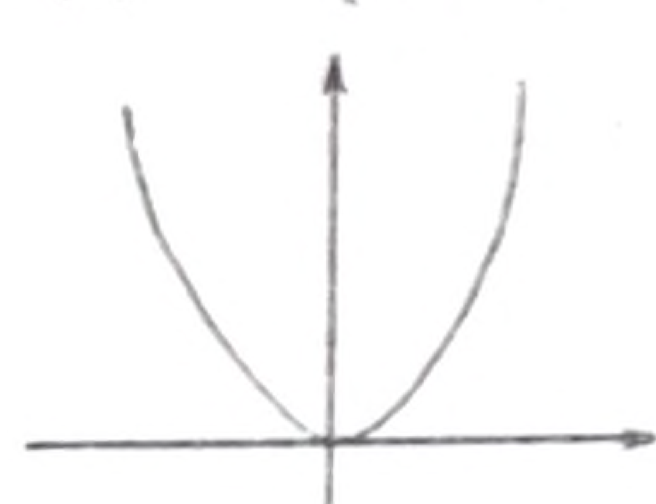
Determinar el crecimiento de la función $y = a\,x^2$ para $x_1 < 0; x_2 > 0$

Recuérdese que $y = a\,x^2$ representa una parábola de eje vertical con $V \equiv (0/0)$

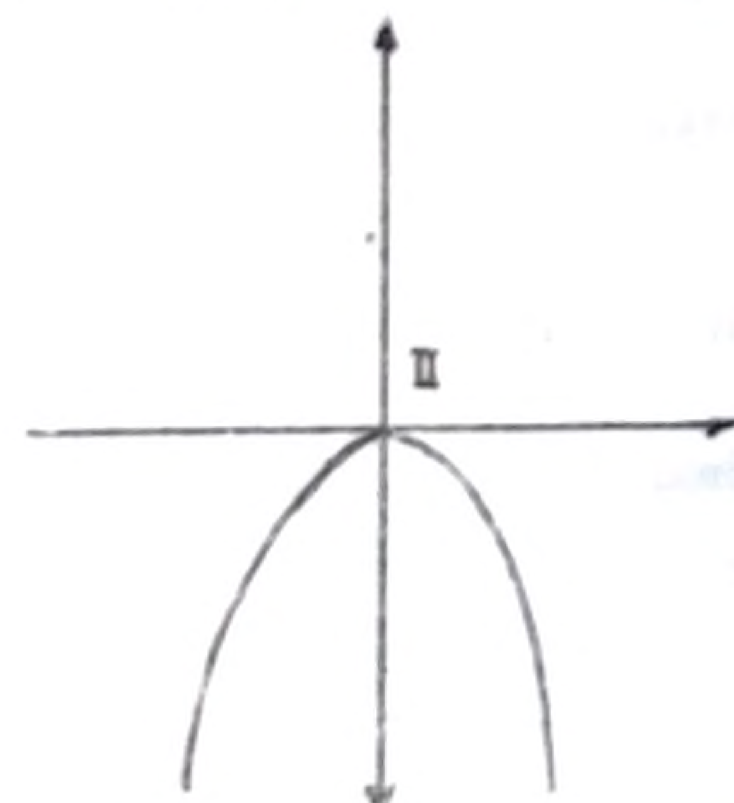
$y' = 2\,a\,x;$ es decir que todo depende del valor de $a$.

Si $a > 0$ (I) $\begin{cases} x_1 < 0 \quad \therefore \quad y' < 0 \quad \text{decreciente} \\ x_2 > 0 \quad \therefore \quad y' > 0 \quad \text{creciente} \end{cases}$

Si $a < 0$ (II) $\begin{cases} x_1 < 0 \quad \therefore \quad y' > 0 \quad \text{creciente} \\ x_2 > 0 \quad \therefore \quad y' < 0 \quad \text{decreciente} \end{cases}$



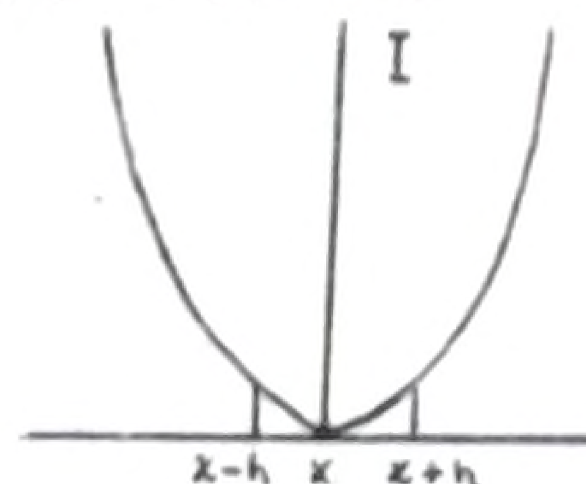
I




Hemos visto que la $y'$ en una función creciente es positiva, y es negativa en una función decreciente.

¿Pero qué pasa en el vértice por ejemplo de las parábolas del ejercicio anterior? Evidentemente en esos puntos críticos la función no es creciente ni decreciente, por lo tanto la $y'$ no puede ser ni positiva ni negativa; y si no es ni una ni otra cosa debe ser igual a $0$. Es decir en esos puntos la $y'$ es igual a $0$.

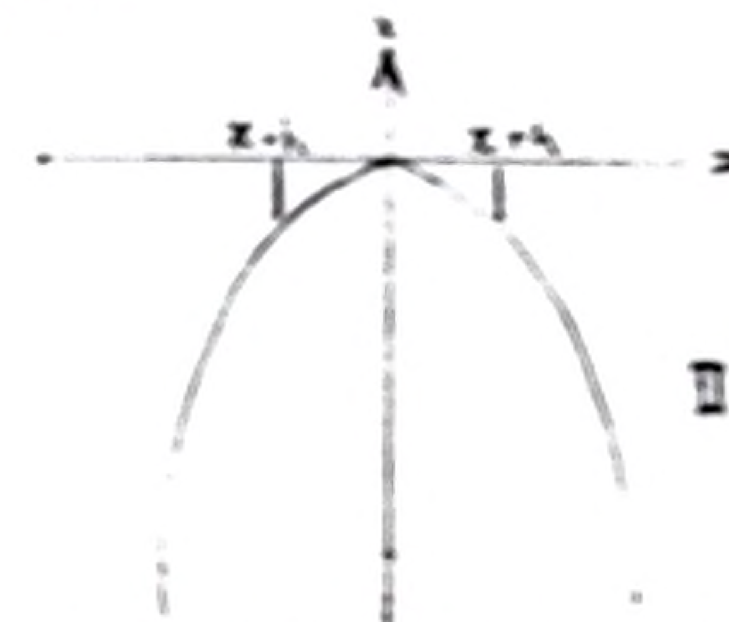
En la figura (I) el vértice es lo que se llama un mínimo relativo, pués en él se cumple $f(x-h) > f(x) < f(x+h)$




En la figura (II) el vértice es un máximo relativo, pués en él se cumple

$$f(x-h) < f(x) > f(x+h)$$






La condición de que en el máximo o mínimo, la $y'$ sea igual a $0$ es lo que se llama necesaria pero no suficiente, pués puede ocurrir en algunos casos que la derivada primera sea igual a $0$, y sin embargo no existe ni máximo ni mínimo, como en el caso de la $f(x) = x^3$ en el punto $x = 0$.

$f'(x) = 3x^2 \therefore f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$; y sin embargo en $x = 0$ no hay ni máximo ni mínimo.

Ahora veremos como se determina cuando hay un máximo, y cuando hay un mínimo.

Estudiaremos dos métodos.

1) Comportamiento de la $f'(x)$ en el retorno del punto crítico.

Vemos en la Fig. (I) que la $f'(x-h)$ es negativa, y que $f'(x+h)$ es positiva; es decir cuando la $f'(x)$ pasa de izquierda a derecha de negativa a positiva estamos en presencia de un mínimo. Y viceversa en la Fig. (II) la derivada primera pasa de positiva,a negativa, y estamos en presencia de un máximo.

2) Utilización de la $y''$ cuando no se anula.

La derivada segunda $(y'')$ es la derivada de la derivada primera.
Observemos que la derivada de una función es otra función. Veamos que la $f'(x)$ en la figura (I) pasa de negativa a positiva a medida que crece $x$, o sea que la $f'(x)$ es creciente. Y si ello ocurre, su derivada (o sea derivada de la $y'$ o también $y''$) tiene que ser positiva. En una palabra, en un punto mínimo la $y' = 0$, y la $y'' > 0$.
En la figura (II) la $y'$ pasa de positiva a negativa a medida que crece $x$, o sea que la $f'(x)$ es decreciente; y su derivada $(y'')$ tiene que ser negativa. En un máximo $y' = 0$, y la $y'' < 0$.

En todos los ejercicios que veremos utilizaremos este método último.

## Ejercicio Nº 238

Determinar el máximo y mínimo de la función $y = 4x^3 - 6x^2 - 72x$.

Se procede de la siguiente manera:

1.- Se saca la 1ra. derivada,

$$y' = 12x^2 - 12x - 72$$

2.- Se iguala la $y'$ a $0$ y se determina para qué valores de $x$ se cumple ello.

$$12x^2 - 12x - 72 = 0 \therefore \div 12 \text{ ambos miembros}$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} \begin{matrix} \nearrow x_1 = 3 \\ \searrow x_2 = -2 \end{matrix}$$

3.- Se saca la $y''$ y se reemplazan en ésta (cuando es posible) las raíces halladas en el punto anterior.

$$y'' = 24x - 12$$

$$[y'']_{x=3} = 24 \cdot 3 - 12 = 72 - 12 = 60 > 0$$

Como la $y'' > 0$, nos encontramos que en el punto de la función cuya abcisa $x = 3$, con un mínimo,

$$[y'']_{x=-2} = 24(-2) - 12 = -48 - 12 = -60 < 0$$

Como la $y'' < 0$, nos encontramos que en el punto $x = -2$ con un máximo,

Si deseamos saber el valor de ordenada en los puntos críticos reemplazamos $x_1$ ; $x_2$ en la función primitiva y nos queda:

$$f(3) = 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 - 72 \cdot 3 = 4 \cdot 27 - 6 \cdot 9 - 216 =$$

$$= 108 - 54 - 216 = -162.$$

$$f(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 6 \cdot (-2)^2 - 72 \cdot (-2) = 4(-8) - 6 \cdot 4 - 72(-2)$$

$$= -32 - 24 + 144 = 88$$



Antes de seguir adelante debemos explicar el porqué de máximos y mínimos relativos; cuando se habla de máximos y/o mínimos se refiere a que en esos puntos críticos la función alcanza un valor mínimo (o máximo) con referencia a los puntos adyacentes. Pero eso no impide que la misma función alcance en otros puntos valores menores (o mayores) que los que alcanza en el mínimo (o en el máximo respectivamente).

Por ejemplo, en el caso de la $f(x) = 4x^3 - 6x^2 - 72x$ analizada en el ejercicio 238, analicemos lo que pasa para $x_3 = -7$, $x_4 = +7$

$$f(-7) = 4 \cdot (-7)^3 - 6 \cdot (-7)^2 - 72(-7) = 4 \cdot (-343) - 6 \cdot 49 + 504$$

$$= -1372 - 294 + 504 = -1162$$

$$f(7) = 4 \cdot 7^3 - 6 \cdot 7^2 - 72 \cdot 7 = 4.343 - 6 \cdot 49 - 504 =$$

$$= 1372 - 294 - 504 = 574$$

Obsérvese que la $f(7) = 574$ es mayor que la que alcanza en $f(-2) = 88$; asimismo $f(-7) = -1162$ es menor que $f(3) = -162$ que es su mínimo relativo.

Asimismo puede ocurrir, como en el caso de $f(x) = x + \frac{1}{x}$ que veremos más adelante, que la ordenada en el mínimo es mayor que la ordenada en el punto máximo.

## Ejercicio Nº 239

Determinar máximo y mínimo de la $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x}$

$$f'(x) = \frac{(2x+1)x - (x^2+x+1)1}{x^2} = \frac{2x^2 + x - x^2 - x - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{2x \cdot x^2 - (x^2-1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{2x^3 - 2x^3 + 2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \quad \therefore \quad x^2 - 1 = 0 \cdot x^2 = 0 \quad \therefore x^2 = 1 \quad \therefore$$

$$x_1 = 1 \; ; \; x_2 = -1$$

$$f''(1) = \frac{2}{1^3} = \frac{2}{1} = 2 > 0 \text{ hay un mínimo para } x = 1$$

$$f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \text{ hay un máximo para } x - 1$$

**Ejercicio Nº 240**

Determinar máximo y mínimo para $f(x) = sen\, x$ para $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = sen\, x$$

$$f'(x) = cos\, x$$

$$f''(x) = -sen\, x$$

$$f'(x) = cos\, x = 0 \quad (1)$$

En (1) se cumple $cos\, x = 0$, cuando $x_1 = \frac{\pi}{2}$; $x_2 = \frac{3}{2}\pi$

Estos valores se reemplazan en la $f''(x)$ $\therefore$

$$f''(x_1) = -sen\frac{\pi}{2} = -1 < 0 \quad \text{hay un máximo}$$

$$f''(x_2) = -sen\frac{3}{2}\pi = -(-1) = 1 > 0 \quad \text{hay un mínimo}$$

Verifíquese el resultado haciendo el gráfico respectivo.

**Ejercicio Nº 241**

Idem anterior para $f(x) = sen\, 2x$

$$f(x) = sen\, 2x$$

$$f'(x) = 2\, cos\, 2x$$



$$f''(x) = -4\, sen\, 2x$$

$$f'(x) = 2\, cos\, 2x = 0 \quad \therefore \quad cos\, 2x = 0$$

$cos\, 2x = 0$ Esto se cumple cuando $x_1 = \frac{\pi}{4}$;

$$x_2 = \frac{3}{4}\pi \; ; \; x_3 = \frac{5}{4}\pi \; ; \; x_4 = \frac{7}{4}\pi$$

Veremos si estas raíces cumplen $f'(x) = 0$

$$cos\, 2x_1 = cos\, 2\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{2} = cos\, 90^o = 0$$

$$cos\, 2x_2 = cos\, 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = cos\frac{6}{4}\pi = cos\frac{3}{2}\pi = cos\, 270^o = 0$$

$$cos\, 2x_3 = cos\, 2 \cdot \frac{5}{4}\pi = cos\frac{10}{4}\pi = cos\frac{5}{2}\pi = cos\, 450^o = cos\, 90^o = 0$$

$$cos\, 2x_4 = cos\, 2 \cdot \frac{7}{4}\pi = cos\frac{14}{4}\pi = cos\frac{7}{2}\pi = cos\, 630 = cos\, 270^o = 0$$

Los valores hallados de $x_1$ ; $x_2$ ; $x_3$ ; $x_4$ se reemplazan en la $f''(x)$, y tenemos

$$f''(x_1) = -4\, sen\, 2x_1 = -4\, sen\, 2 \cdot \frac{\pi}{4} = -4\, sen\frac{\pi}{2} = -4 \cdot 1 = -4 < 0$$

Hay un máximo.

$$f''(x_2) = -4\, sen\, 2 \cdot x_2 = -4\, sen\, 2 \cdot \frac{3}{4}\pi = -4\, sen\frac{6}{4}\pi =$$

$$= -4\, sen\frac{3}{2}\pi = -4\, sen\, 270^o = -4 \cdot (-1) = 4 > 0$$

Hay un mínimo

$$f''(x_3) = -4\, sen\, 2x_3 = -4\, sen\, 2 \cdot \frac{5}{4}\pi = -4\, sen\frac{10}{4}\pi =$$

$$= -4\, sen\frac{5}{2}\pi = -4\, sen\, 450^o = -4\, sen\, 90^o = -4 \cdot 1 = -4 < 0$$

Hay un máximo

$$f'''(x_4) = -4 \operatorname{sen} 2x_4 = -4 \operatorname{sen} 2 \cdot \frac{7}{4}\pi = -4 \operatorname{sen} \frac{14}{4}\pi =$$

$$= -4 \operatorname{sen} \frac{7}{2}\pi = -4 \operatorname{sen} 630^o = -4 \operatorname{sen} 270^o = -4 \cdot (-1) = 4 > 0$$

Hay un mínimo.

Es decir para valores $0 < x < 2\pi$, la función pasa por dos mínimos y por dos máximos.

Verifíquese el resultado haciendo la gráfica correspondiente.

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | $\frac{5}{4}\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ | $\frac{7}{4}\pi$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y = \operatorname{sen} 2x$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

### Ejercicio Nº 242

Determinar máximo y mínimo de la función $y = ax^2 + bx + c$

Recordemos que la función aludida representa gráficamente una parábola de eje vertical; que el vértice $V \equiv \left( \frac{-b}{2a} \,/\, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$. Demostraremos que el vértice de la parábola es el mínimo o el máximo según sea el valor de $a$.

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y' = 2ax + b$$

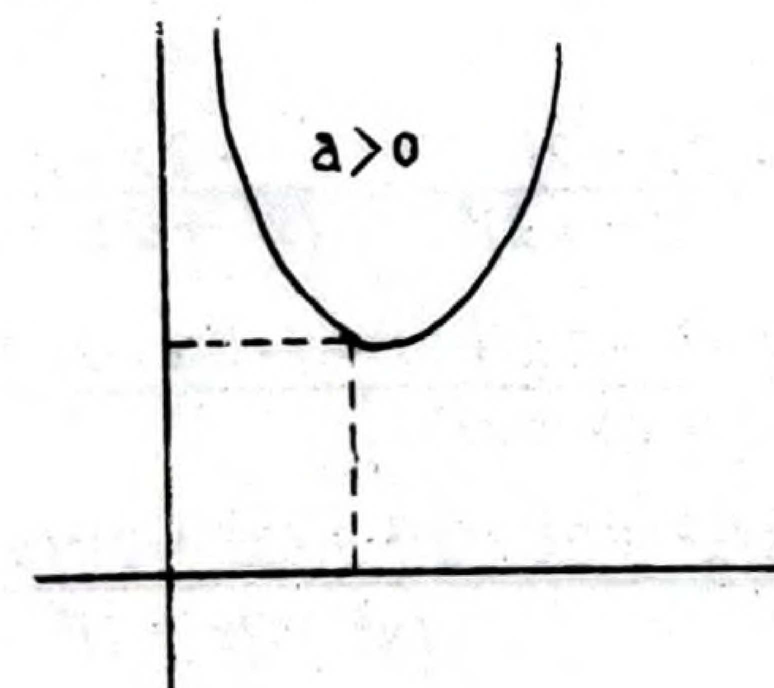
$$y'' = 2a$$

Hacemos $y' = 0 \therefore 2ax + b = 0 \therefore 2ax = -b \therefore x = \frac{-b}{2a} (1)$

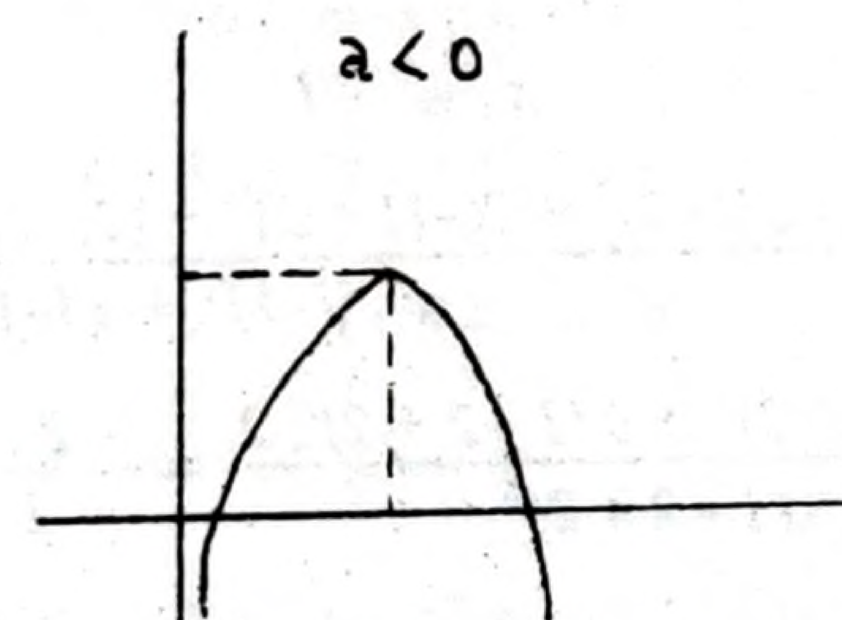
En el punto de la parábola cuya abcisa sea (1) habrá un máximo o un mínimo. Fijarse que (1) coincide con la abcisa del vértice.

Ahora reemplazamos (1) en $y''$, pero observamos que ello no es posible, pués en ésta no aparece para nada la $x$. ¿Y entonces? Es muy fácil: decimos, si $y'' = 2a$, cuando $a > 0$, entonces $y'' > 0$, por lo cual habrá un mínimo y entonces la curva será de esta forma:






Si $a < 0$ ; $y'' < 0$ , por lo cual habrá un máximo, y entonces la curva será de esta forma:




Cabe señalar que precisamente no es necesario que la $f(x)$ tenga máximo y mínimo; puede existir —como en este caso— un extremo y no el otro.

### Ejercicio Nº 243

Calcular máximo y mínimo para la $f(x) = x^2 - 12x + 5$

$$f'(x) = 2x - 12$$

$$f''(x) = 2$$

$$f'(x) = 2x - 12 = 0 \quad \therefore \quad x = 6$$

Como $f''(x) = 2 > 0$ hay un mínimo para $x = 6$ . La curva no tiene máximo.

### Ejercicio Nº 244

Calcular máximo y mínimo de la $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$

$$f'(x) = \frac{-(2x+2)}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{-2x-2}{(x^2+2x+2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+2x+2)^2 - (-2x-2)\,2\,(x^2+2x+2).(2x+2)}{(x^2+2x+2)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x^2+2x+2)^2 + (2x+2)^2(x^2+2x+2)\,2}{(x^2+2x+2)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-2x-2}{x^2+2x+2} = 0 \;\therefore\; -2x-2 = 0 \;\therefore\; -2x = 2$$

$$x = -1$$

$$f''(1) = \frac{-2[(-1)^2+2(-1)+2]^2 + [2(-1)+2]^2\,[(-1)^2+2(-1)+2]2}{[(-1)^2+2(-1)+2]^4}$$

$$f''(1) = \frac{-2(1-2+2)^2 + 0(1-2+2).2}{(1-2+2)^4} = \frac{-2.1}{1} = -2 < 0$$

Hay un máximo para $x = -1$; no tiene mínimo.

## Ejercicio N° 245

Calcular máximo y mínimo para la función $y = sen\, x + cos\, x$ para $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = sen\, x + cos\, x$$

$$f'(x) = cos\, x - sen\, x$$

$$f''(x) = -sen\, x - cos\, x$$

$$f'(x) = cos\, x - sen\, x = 0 \quad\therefore\quad cos\, x = sen\, x \quad\therefore$$

Diviendo ambos miembros por $cos\, x$ nos queda $1 = tg\, x$ $\therefore$ Esto se cumple cuando

$$x_1 = \frac{\pi}{4};\quad x_2 = \frac{5}{4}\pi$$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = -sen\frac{\pi}{4} - cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$$



para $x_1 = \frac{\pi}{4}$ la $f(x)$ pasa por un máximo

$$f''(\frac{5}{4}\pi) = -sen\,\frac{5}{4}\pi - cos\,\frac{5}{4}\pi = -sen\,225^o - cos\,225^o = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} > 0$$

para $x_2 = \frac{5}{4}\pi$ la curva pasa por un mínimo.

## Ejercicio N° 246

Determinar máximo y mínimo para la función

$$f(x) = 2\,sen\,x + 4\,cos\,x \quad \text{para} \quad 0 < x < 2\pi$$

$$f(x) = 2\,sen\,x + 4\,cos\,x$$

$$f'(x) = 2\,cos\,x - 4\,sen\,x$$

$$f''(x) = -2\,sen\,x - 4\,cos\,x$$

$$f'(x) = 2\,cos\,x - 4\,sen\,x = 0 \;\therefore\; 2\,cos\,x = 4\,sen\,x \;\therefore$$

$$1 = \frac{4\,sen\,x}{2\,cos\,x} = 2\,tg\,x \;\therefore\; \frac{1}{2} = tg\,x$$

se cumple cuando $x_1 \cong 26^o\,34'$ ; $x_2 \cong 206^o\,34'$

Se reemplazan estos valores en $f''(x)$ y nos queda $f''(x_1) = -2\,sen\,26^o34' - 4\,cos\,26^o\,34' < 0$ hay un máximo

$$f''(x_2) = -2\,sen\,206^o\,34' - 4\,cos\,206^o\,34' =$$

$$= -2(-sen\,26^o\,34) - 4(-cos\,26^o\,34') =$$

$$= +2\,sen\,26^o\,34' + 4\,cos\,26^o\,34' > 0 \text{ hay un mínimo}$$

## Ejercicio N° 247

Determinar máximo y mínimo de la función $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

$$f'(x) = 4x^3 - x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 1$$

$$f'(x) = 4x^3 - x = 0 \therefore x(4x^2 - 1) = 0 \therefore$$

$$x_1 = 0;\ 4x^2 - 1 = 0 \therefore 4x^2 = 1 \therefore x^2 = \frac{1}{4} \therefore$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2} \therefore x_2 = \frac{1}{2};\ x_3 = -\frac{1}{2}$$

Es decir para $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -\frac{1}{2}$ la $f'(x)$ es igual a $0$.

Reemplazamos estos valores en $f''(x)$ y tenemos,

$$f''(x_1) = 12 \,.\, 0 - 1 = -1 < 0 \text{ máximo}$$

$$f''(x_2) = 12\,.\,(\frac{1}{2})^2 - 1 = 12\,.\,\frac{1}{4} - 1 = 2 > 0 \text{ mínimo}$$

$$f''(x_3) = 12(-\frac{1}{2})^2 - 1 = 12\,.\,\frac{1}{4} - 1 = 2 > 0 \text{ mínimo}$$

Es decir la $f(x)$ tiene un máximo y dos mínimos.

### Ejercicio Nº 248

Determinar máximo y mínimo de la función $f(x) = \frac{(a+x)^2}{a-x}$

$$f'(x) = \frac{2(a+x)(a-x) - (a+x)^2(-1)}{(a-x)^2} = \frac{2(a^2 - x^2) + (a+x)^2}{(a-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2a^2 - 2x^2 + a^2 + 2ax + x^2}{(a-x)^2} = \frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(a-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2a - 2x)(a-x)^2 - (3a^2 + 2ax - x^2)\,2(a-x)(-1)}{(a-x)^4}$$

$$f'(x) = \frac{3a^2 + 2ax - x^2}{(a-x)^2} = 0 \therefore 3a^2 + 2ax - x^2 = 0$$



$$+x^2 - 2ax - 3a^2 = 0 \therefore x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 - 4\,.\,(+1)(-3a^2)}}{2(+1)}$$

$$x = \frac{2a \pm \sqrt{4a^2 + 12a^2}}{2} = \frac{2a \pm \sqrt{16a^2}}{2} = \frac{2a \pm 4a}{2}$$

$$x_1 = \frac{2a + 4a}{2} = \frac{6a}{2} = +3a$$

$$x_2 = \frac{2a - 4a}{2} = \frac{-2a}{2} = -a$$

Reemplazamos estos valores en $f''(x)$ y nos queda,

$$f''(3a) = \frac{(2a - 6a)(a - 3a)^2 - (3a^2 + 2a\,.\,3a - 9a^2)\,2\,.\,(a - 3a)(-1)}{(a - 3a)^4}$$

$$f''(3a) = \frac{-4a\,.\,(-2a)^2 - 0}{(-2a)^4} = \frac{-4a\,.\,4a^2}{16a^4} = \frac{-16a^3}{16a^4} = \frac{-1}{a}$$

Si suponemos que $a > 0$ nos encontramos que $f''(3a) = \frac{-1}{a} < 0$ hay un máximo.

$$f''(-a) = \frac{(2a + 2a)(a + a)^2 - (3a^2 - 2a^2 - a^2)\,2(a + a)(-1)}{(a + a)^4}$$

$$f''(a) = \frac{4a\,.\,(2a)^2 - 0}{(2a)^4} = \frac{4a\,.\,4a^2}{16a^4} = \frac{16a^3}{16a^4} = \frac{1}{a} > 0$$

Hay un mínimo (suponiendo que $a > 0$)

### Ejercicio Nº 249

Determinar máximo y mínimo de la $f(x) = x + \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = (1 - \frac{1}{x^2})' = (1 - x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \therefore 1 = \frac{1}{x^2} \therefore x^2 = 1 \therefore x = \pm\sqrt{1} \therefore$$

$$x_1 = 1 \; ; \quad x_2 = -1$$

$$f''(x_1) = f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \quad \text{mínimo}$$

$$f''(x_2) = f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = \frac{2}{-1} = -2 < 0 \quad \text{máximo}$$

Es decir que para $x_1 = 1$ hay un mínimo, y para $x_2 = -1$ hay un máximo. Pero observemos lo que vale la función en los puntos críticos:

$$f(1) = 1 + \frac{1}{1} = 1 + 1 = 2 \quad \text{en el mínimo}$$

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{-1} = -1 - 1 = -2 \quad \text{en el máximo}$$

O sea en el mínimo la función vale más que en el máximo.

## Ejercicio Nº 250

Determinar máximo y mínimo de la $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{x^2} \cdot (-2x) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{x^2} \cdot x$$

$$f''(x) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot [e^{x^2} (-2x) \cdot x + e^{x^2}] =$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{x^2} [-2x^2 + 1]$$

Debe observarse que $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ es una constante, y que al sacarse la $f''(x)$, en el corchete se saca $e^{x^2}$ como factor común.

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} e^{x^2} \cdot x = 0; \text{ para que } f'(x) = 0$$

debe ocurrir solamente cuando uno de los factores sea igual a $0$ ; el único que puede valer 0 es el factor $x$, o sea que $x = 0$.



Reemplazamos este valor en $f''(x)$ y tenemos

$$f''(0) = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^0 [0 + 1] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot 1 \cdot 1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} < 0$$

Es decir que para $x = 0$, la $f(x)$ pasa por un máximo; no tiene mínimo.

## Ejercicio Nº 251

Dividir el número $b$ en dos partes que su producto sea máximo.
Si una parte la llamamos $x$, la otra será $b-x$, o sea que el producto será $x(b-x)$

$$y = x(b-x) = bx - x^2$$

$$y' = b - 2x$$

$$y'' = -2$$

$$y' = b - 2x = 0 \therefore b = 2x \therefore x = \frac{b}{2}$$

Como la $y'' = -2 < 0$, hay un máximo para $x = \frac{b}{2}$ ; o sea que para que el producto sea máximo las partes deben ser iguales.

Por ejemplo, si $b = 10$

| | |
|---|---|
| $1 \cdot 9 = 9$ | $6 \cdot 4 = 24$ |
| $2 \cdot 8 = 16$ | $7 \cdot 3 = 21$ |
| $3 \cdot 7 = 21$ | $8 \cdot 2 = 16$ |
| $4 \cdot 6 = 24$ | $9 \cdot 1 = 9$ |
| $5 \cdot 5 = 25$ | |

Se ve que el producto máximo es cuando los dos factores son iguales a $\frac{10}{2} = 5$

## Ejercicio Nº 252

Cuándo es mínima la suma de un número $x$ y del cuadrado de su recíproca?

$$y = x + \left(\frac{1}{x}\right)^2 = x + \frac{1}{x^2} = x + x^{-2}$$

$$y' = 1 - 2x^{-3}$$

$$y'' = 6x^{-4}$$

$$y' = 1 - 2x^{-3} = 0 \therefore 1 = 2x^{-3} \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{x^3} \therefore 2 = x^3 \therefore$$

$$x_1 = \sqrt[3]{2}$$

$$y''(x_1) = 6(\sqrt[3]{2})^{-4} = \frac{6}{(\sqrt[3]{2})^4} = \frac{6}{\sqrt[3]{2^4}} = \frac{6}{\sqrt[3]{16}} > 0 \text{ mínimo}$$

Es mínima cuando $x = \sqrt[3]{2}$

**Ejercicio Nº 253**

Determinar el máximo y mínimo de la función $f(x) = x^x$

Como se vio en el ejercicio Nº 162 la $f'(x) = x^x(1 + Lx)$

$$f''(x) = x^x(1 + Lx).(1 + Lx) + x^x\frac{1}{x} = x^x(1 + Lx)^2 + x^x\frac{1}{x}$$

$$f''(x) = x^x[(1 + Lx)^2 + \frac{1}{x}]$$

Hacemos $f'(x) = x^x(1 + Lx) = 0$ ; para que esto ocurra debe ser igual a $0$ cualquiera de los dos factores; pero más adelante se verá que el primer factor $x^x$ no vale nunca $0$ ; por lo que únicamente $1 + Lx = 0$

$$\therefore Lx = -1 \therefore x = \ell^{-1} = \frac{1}{\ell}$$

$$f''(\frac{1}{\ell}) = (\frac{1}{\ell})^{\frac{1}{e}} [(1 + L\frac{1}{\ell})^2 + \frac{1}{\frac{1}{\ell}}] \quad (1)$$

Pero, $L\frac{1}{\ell} = L1 - L\ell = 0 - 1 = -1$

$\frac{1}{\frac{1}{\ell}} = \ell$ o sea que (1) quedaría,

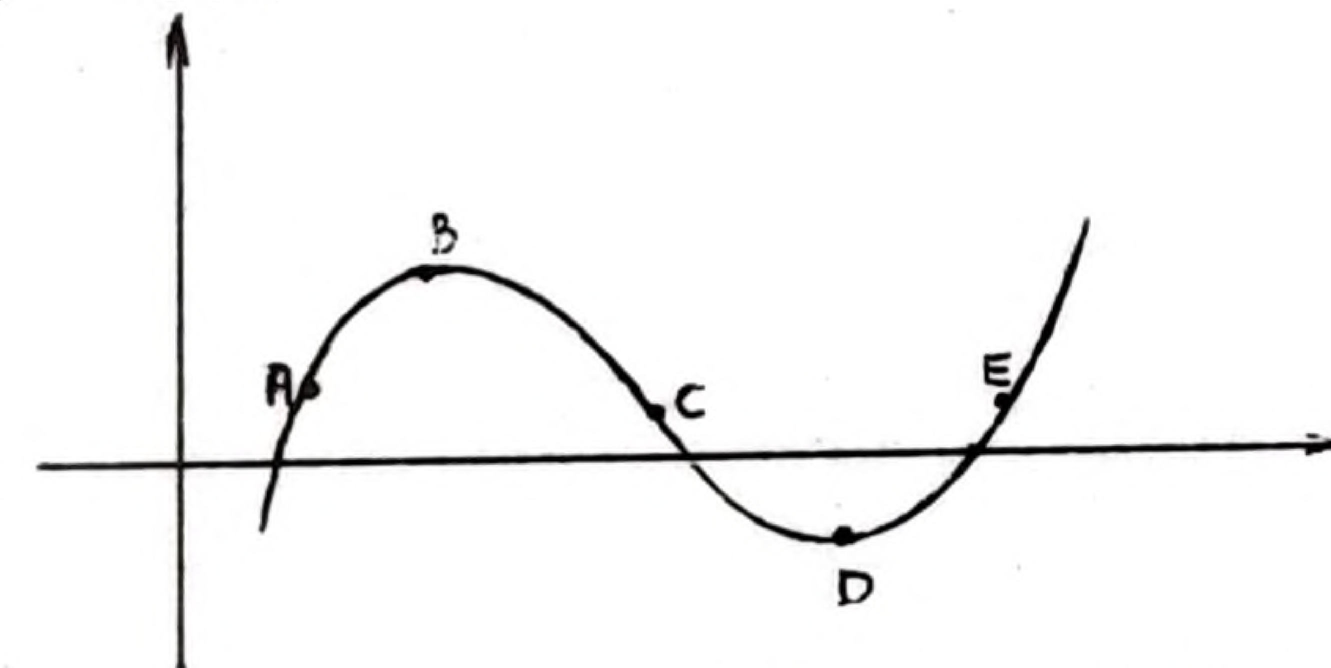
$$f''(\frac{1}{\ell}) = (\frac{1}{\ell})^{\frac{1}{e}} [(1 - 1)^2 + \ell] = (\frac{1}{\ell})^{\frac{1}{e}} . \ell > 0$$



por lo tanto para $x = \frac{1}{\ell}$ ; la $f(x)$ pasa por un mínimo.

IV. – Concavidad. Puntos de Inflexión.

Sea la función $y = f(x)$




Como se ha visto anteriormente en los puntos máximos y mínimos relativos, la $f'(x)$ es igual a cero; asimismo se indicó que en la porción de la curva $\widehat{ABC}$, la $f'(x)$ es una función decreciente, pues va pasando de positiva (en A), a nula (en B) y a negativa (en C); por lo tanto su derivada, o sea $[f'(x)]'$ ó también $f''(x)$ debe ser negativa.

Se dice que una $f(x)$ es cóncava hacia las $y$ negativas (o también se la denomina convexa), cuando su derivada segunda es negativa. Obsérvese en este caso que el "hueco de la curva" es el que mira hacia el eje $y$ negativo; también las rectas tangentes a la curva están por encima de ella.

En el arco $\widehat{CDE}$ pasa todo lo contrario; en el mismo la $f'(x)$ es una función creciente pues pasa de negativa (en C), nula (en D) a positiva (en E). Por lo tanto su derivada, o sea $f''(x)$ debe ser positiva.

Se dice que una $f(x)$ es cóncava hacia las $y$ positivas (o simplemente cóncava), cuando su derivada segunda es positiva. Obsérvese en este caso que el "hueco de la curva" es el que mira hacia el eje $y$ positivo; también las rectas tangentes a la curva están por debajo de ella.

¿Pero qué pasa en el punto C? En él la curva cambia de orientación de convexa a cóncava (o también en forma contraria); como la curva no es ni una ni otra cosa en C, debe ser necesariamente $f''(x) = 0$. El punto C es llamado punto de inflexión.

En una palabra, en el punto de inflexión de una $f(x)$, la $f''(x)$ es igual a $0$. Es una condición necesaria pero no suficiente, pués en algunos casos la $y''$ es igual a $0$, y sin embargo no hay punto de inflexión. (Ejemplo: $y = x^4$ tiene $y'' = 12x^2$ que se anula en $x = 0$, y allí la $f(x)$ tiene un mínimo). En

general, si en un punto la $f''(x) = 0$, habrá inflexión si $f'''(x) \neq 0$.

### Ejercicio Nº 254

Determinar el punto de inflexión de la función $y = 4x^3 - 6x^2 - 72$, y los intervalos de concavidad de la misma.

$$y = 4x^3 - 6x^2 - 72x$$

$$y' = 12x^2 - 12x - 72$$

$$y'' = 24x - 12$$

$$y'' = 24x - 12 = 0 \therefore 24x = 12 \therefore x = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Es decir que el punto de la curva cuya abcisa sea igual a $\frac{1}{2}$, es un punto de inflexión. Veremos lo que pasa a la izquierda y a la derecha de ese punto en la curva tomando dos puntos cualesquiera $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. Por ejemplo,

$f''(x_1) = 24 \,.\, 0 - 12 = -12 < 0$ la curva es convexa

$f''(x_2) = 24 \,.\, 1 - 12 = 12 > 0$ la curva es cóncava

Es decir, para $-\infty < x < \frac{1}{2}$; la curva es convexa; para $\frac{1}{2} < x < \infty$, la curva es cóncava.

### Ejercicio Nº 255

Determinar punto de inflexión, e intervalo de concavidad de la $f(x) = sen\, x$ para $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = sen\, x$$

$$f'(x) = cos\, x$$

$$f''(x) = -sen\, x$$



$f''(x) = -sen\, x = 0 \therefore x_1 = 0$; $x_2 = \pi$; $x_3 = 2\pi$

(Se descartan $x_1$, $x_3$ atento al enunciado del problema)

Por lo tanto, para $x = \pi$ hay un punto de inflexión.

Veamos lo que pasa a la izquierda y derecha del mismo.

(Por ejemplo, $x_4 = \frac{\pi}{2}$; $x_5 = \frac{3}{2}\pi$ )

$f''(x_4) = -sen\frac{\pi}{2} = -1 < 0$ convexa

$f''(x_5) = -sen\frac{3}{2}\pi = -(-1) = > 0$ cóncava

Es decir para $0 < x < \pi$ la curva es convexa; para $\pi < x < 2\pi$ la curva es cóncava.

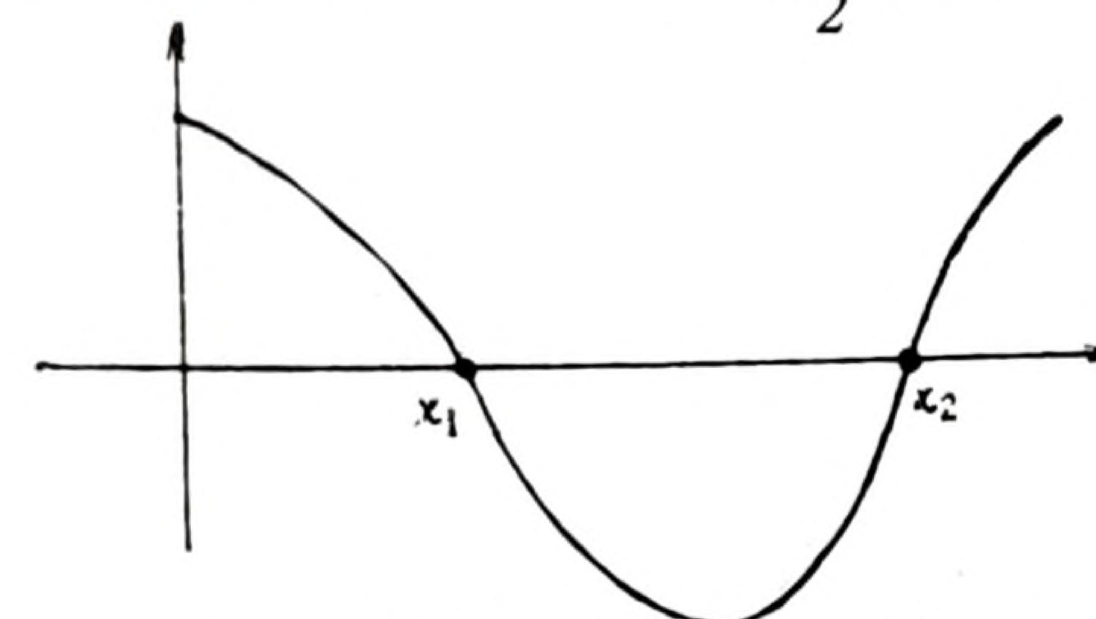
### Ejercicio Nº 256

Idem anterior para $f(x) = cos\, x$

$$f'(x) = -sen\, x$$

$$f''(x) = -cos\, x$$

$$f''(x) = -cos\, x = 0 \therefore x_1 = \frac{\pi}{2};\ x_2 = \frac{3}{2}\pi$$




1. – Veamos lo que pasa para $0 < x < x_1$ (Ejemplo: $x = \frac{\pi}{4}$)

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -cos\frac{\pi}{4} = -cos\, 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La curva es convexa para $0 < x < \frac{\pi}{2}$

2. – Tomemos un punto $x_1 < x < x_2$ (Ejemplo: $x = \pi$ )

$$f''(\pi) = -\cos\pi = -(-1) = 1 > 0$$

La curva es cóncava para $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

3. – Tomemos un punto $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$ (Ejemplo: $\frac{7}{4}\pi$ )

$$f''(\frac{7}{4}\pi) = -\cos\frac{7}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0$$

La curva es convexa para $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

**Ejercicio Nº 257**

Determinar puntos de inflexión e intervalos de concavidad para $f(x) = sen\ 2x$ para $0 < x < 2\pi$

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

$$f''(x) = -4\ sen\ 2x$$

$$f''(x) = -4\ sen\ 2x = 0 \quad \therefore \quad sen\ 2x = 0 \quad \therefore$$

Se cumple para $x_1 = \frac{\pi}{2}$ ; $x_2 = \pi$ ; $x_3 = \frac{3}{2}\pi$

Por ejemplo, $f''(x_1) = -4 .\ sen\ 2 . \frac{\pi}{2} = -4 .\ sen\ \pi = -4 . 0 = 0$

1. – Para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tomemos como ejemplo: $x = \frac{\pi}{4}$

$$f''(\frac{\pi}{4}) = -4 .\ sen\ 2 . \frac{\pi}{4} = -4\ sen\ \frac{\pi}{2} = -4 . 1 = -4 < 0$$

La curva es convexa para este intervalo.

2. – $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ tomemos, $x = \frac{3}{4}\pi$

$$f''(\frac{3}{4}\pi) = -4 .\ sen\ 2 . \frac{3}{4}\pi = -4\ sen\ \frac{6}{4}\pi =$$



$$-4 .\ sen\ \frac{3}{2}\pi = -4(-1) = 4 > 0$$

En este intervalo la $f(x)$ es cóncava.

3. – para $\pi < x < \frac{3}{2}\pi$ Tomemos como ejemplo $x = \frac{5}{4}\pi$

$$f''(\frac{5}{4}\pi) = -4\ sen\ 2\frac{5}{4}\pi = -4 .\ sen\ \frac{10}{4}\pi = -4\ sen\ \frac{5}{2}\pi$$

$$= -4 . 1 = -4$$

En este intervalo la $f(x)$ es convexa.

**Ejercicio Nº 258**

Idem anterior para la $f(x) = a x^2 + b x + c$

$$f'(x) = 2ax + b$$

$$f''(x) = 2a$$

Como la $f''(x) = 2a$, nunca puede ser que la $f''(x) = 0$ ; pués $a \neq 0$
Si $a = 0$ no tendríamos la $f(x)$ que estamos analizando.

Por lo que la curva no tiene punto de inflexión. Si $a > 0 \quad \therefore \quad f''(x) > 0$ ;
La curva es cóncava en toda su extensión $(-\infty < x < \infty)$. Si $a < 0 \quad \therefore$
$f''(x) < 0$ ; la curva es convexa en toda su extensión.

En una palabra, la curva es convexa o es cóncava en toda su extensión; de acuerdo al valor de $a$.

**Ejercicio Nº 259**

Idem anterior para $f(x) = x^2 - 12x + 5$

$$f'(x) = 2x - 12$$

$$f''(x) = 2 \neq 0$$

No hay punto de inflexión . Como $f''(x) = 2 > 0$ la curva es cóncava en toda su extensión.

**Ejercicio Nº 260**

Idem para la función $f(x) = sen\,x + cos(x)$ para $0 < x < 2\pi$

$$f(x) = sen\,x + cos\,x$$

$$f'(x) = cos\,x - sen\,x$$

$$f''(x) = -sen\,x - cos\,x$$

$$f''(x) = -sen\,x - cos\,x = 0 \therefore -sen\,x = cos\,x \therefore$$

$$-\frac{sen\,x}{cos\,x} = \frac{cos\,x}{cos\,x} \therefore -tg\,x = 1 \therefore tg\,x = -1$$

Se cumple en $x_1 = 135º$ ; $x_2 = 315º$

1. – Veamos el intervalo $0 < x < 135º$ (Por ejemplo, $90º$)

$$f''(90º) = -sen\,90º - cos\,90º = -1 - 0 = -1 < 0$$

La curva es convexa.

2. – Para $135 < x < 315º$ (Por ejemplo, $180º$)

$$f''(180º) = -sen\,180º - cos\,180º = -0-(-1) = 1 > 0$$

La curva es cóncava.

3. – Para $315º < x < 360º$ (Por ejemplo, $x = 330º$)

$$f''(330º) = -sen\,330º - cos\,330º = -(-sen\,30º) - cos\,30º =$$

$$= sen\,30º - cos\,30º = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2} < 0$$



La curva es convexa.

**Ejercicio Nº 261**

Determinar puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2$

$$f'(x) = 4x^3 - x$$

$$f''(x) = 12x^2 - 1$$

$$12x^2 - 1 = 0 \therefore 12x^2 = 1 \therefore x^2 = \frac{1}{12} \therefore x = \pm\sqrt{\frac{1}{12}}$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{12}} ; \quad x_2 = -\frac{1}{\sqrt{12}}$$

En estos puntos, hay dos puntos de inflexión.

1. – Para $-\infty < x < \frac{-1}{\sqrt{12}}$ (Ejemplo: $x = -1$)

$$f''(-1) = 12(-1)^2 - 1 = 11 > 0 \text{ cóncava}$$

2. – Para $\frac{-1}{\sqrt{12}} < x < \frac{1}{\sqrt{12}}$ $(x = 0)$

$$f''(0) = 12.0 - 1 = -1 < 0 \text{ convexa}$$

3. – Para $\frac{1}{\sqrt{12}} < x < \infty$ $(x = 1)$

$$f''(1) = 12.1 - 1 = 11 > 0 \text{ cóncava.}$$

**Ejercicio Nº 262**

Determinar puntos de la inflexión de la $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} . e^{-x^2} . (-2x) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} . x . e^{-x^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2}{\sqrt{\pi}}[e^{x^2} + x \, . \, e^{x^2}(-2x)] = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \, . \, e^{x^2}(1 - 2x^2)$$

(Ver ejercicio Nº 250)

$$f''(x) = \frac{-2}{\pi} e^{x^2} (1 - 2x^2) = 0 \quad (1)$$

(1) Se cumple cuando $1 - 2x^2 = 0 \therefore 1 = 2x^2 \therefore \frac{1}{2} = x^2 \therefore$ $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$; $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $x_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ En estos dos puntos están los puntos de inflexión.

a) Intervalo $-\infty < x < \frac{-1}{\sqrt{2}}$ (Ejemplo, $x = -1$)

$$f'' = \frac{-2}{\pi} e^{(-1)^2} [1 - 2 . (-1)^2] = -\frac{2}{\pi} e^1 (1 - 2) =$$

$$-\frac{2}{\pi} . \frac{1}{e} . (-1) = \frac{2}{\pi e} > 0 \text{ cóncava}$$

b) Intervalo $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (Ejemplo, $x = 0$)

$$f'' = -\frac{2}{\pi} e^0 (1 - 0) = -\frac{2}{\pi} < 0 \text{ convexa}$$

c) Intervalo $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \infty$ (Ejemplo, $x = 1$)

$$f'' = \frac{-2}{\pi} e^1 (1 - 2 \, . \, 1^2) = \frac{-2}{\pi} . \frac{1}{e} . (-1) = \frac{2}{\pi e} > 0 \text{ cóncava}$$

V. – Derivadas sucesivas

Hemos visto ya en los ejemplos anteriores la utilización de la $y''$. Asimismo la $y'''$ (derivada tercera) es la derivada de la $y''$. Y así sucesivamente. Debemos advertir sobre la simbología:

$$y^{IV} = y^{(4)} \; ; \; y^{X} = y^{(10)}$$



significa en un caso derivada cuarta; derivada décima en el otro. ($y^{(0)}$: significa la $f(x)$ primitiva o sea sin derivar).

## Ejercicio Nº 263

Calcular las derivadas sucesivas de $y = x^n$ ($n$: Nº nat.)

$$y = x^n$$

$$y' = n x^{n-1}$$

$$y'' = n(n-1) \, . \, x^{n-2} = A_n^2 \; x^{n-2}$$

$A_n^2$ = Arreglos de $n$ elementos tomados de dos en dos.

$$y''' = n(n-1)(n-2)x^{n-3} = A_n^3 \; x^{n-3}$$

$$y^{IV} = n(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-4} = A_n^4 \; x^{n-4}$$

$$y^{(m)} = n(n-1)(n-2) ... [n-(m-1)] \, . \, x^{n-m}$$

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2) ... [n-(n-1-1)] \, x^{n-(n-1)}$$

$$y^{(n-1)} = n(n-1)(n-2) ... 2 \, . \, x^1$$

$$y^{(n)} = n(n-1)(n-2) ... 2 \, . \, 1 \, . \, x^0$$

$$y^{(n)} = n!$$

Es decir la $y^{(n)}$ de $x^n$ es igual a una constante ($n!$); las derivadas de orden superior son nulas, pues la derivada de una constante es igual a $0$.

## Ejercicio Nº 264

Calcular las derivadas sucesivas de $y = x^5$

$$y' = 5x^4$$

$$y'' = 20x^3$$

$$y''' = 60x^2$$

$$y^{IV} = 120x$$

$$y^{V} = 120$$

$$y^{(6)} = 0$$

Verifíquese si se cumple la regla del ejercicio anterior.

**Ejercicio Nº 265**

Calcular las derivadas sucesivas de $y = x^{\frac{3}{2}}$

$$y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$y'' = \frac{3}{4}x^{-1/2}$$

$$y''' = -\frac{3}{8}x^{-3/2}$$

$$y^{IV} = \frac{9}{16}x^{-5/2}$$

Y así podemos derivar indefinidamente.

**Ejercicio Nº 266**

Calcular las derivadas sucesivas de $y = sen\,x$

$$y^{(0)} = sen\,x$$

$$y^{(1)} = cos\,x$$

$$y^{(2)} = -sen\,x$$

$$y^{(3)} = -cos\,x$$



$$y^{(4)} = sen\,x$$

Se observa que la $y^{(4)} = y^{(0)}$; luego se inicia nuevamente el ciclo.

**Ejercicio Nº 267**

Calcular la $y^{(237)}$ de $y = sen\,x$

Para calcular la $y^{(237)}$ de la $f(x)$ dada, podemos hacer lo siguiente: se divide – 237 por 4 (desde cuando se comienza a repetir el ciclo); nos da 59 y un resto, de 1 $\therefore$ $y^{(237)} = y^{(1)} = cos\,x$

**Ejercicio Nº 268**

Calcular las derivadas sucesivas de $y = cos\,x$

$$y^{(0)} = cos\,x$$

$$y^{(1)} = -sen\,x$$

$$y^{(2)} = -cos\,x$$

$$y^{(3)} = sen\,x$$

$$y^{(4)} = cos\,x$$

Nuevamente a partir de $y^{(4)}$ se comienza a repetir el ciclo.

**Ejercicio Nº 269**

Calcular la $y^{(40)}$ de $y = cos\,x$

$$40 \div 4 = 10 \text{ (resto } = 0) \therefore$$

$$y^{(40)} = y^{\circ} = cos\,x$$

### Ejercicio Nº 270

Calcular las derivadas sucesivas de $y = \ell^{x}$

$$y = \ell^{x}$$

$$y' = \ell^{x}$$

$$y^{(2)} = \ell^{x}$$

$$y^{(3)} = \ell^{x}$$

$$y^{(4)} = \ell^{x}$$

Y así sucesivamente, todas las derivadas son iguales a $\ell^{x}$

### Ejercicio Nº 271

Calcular las derivadas sucesivas de $y = Lx$

$$y = Lx$$

$$y' = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y'' = -x^{-2}$$

$$y^{III} = 2x^{-3}$$

$$y^{IV} = -6x^{-4} = -3!\ x^{-4}$$

$$y^{V} = 24x^{-5} = 4!\ x^{-5}$$

y en general $y^{(n)} = (-1)^{n-1}\ (n-1)!\ \ x^{-n}$

### Ejercicio Nº 272

Calcular las derivadas sucesivas de $y = \ell^{-x}$



$$y = \ell^{-x}$$

$$y' = -\ell^{-x}$$

$$y'' = -\ell^{-x}\ (-1) = \ell^{-x}$$

$$y^{III} = -\ell^{-x}$$

$$y^{IV} = \ell^{-x}$$

Se observa que las derivadas pares son $\ell^{-x}$ ; y las impares son iguales a $-\ell^{-x}$.

### Ejercicio Nº 273

Calcular las derivadas sucesivas de $y = sen\ 2x$

$$y^{(0)} = sen\ 2x = sen\ 2x$$

$$y^{(1)} = 2\cos 2x = 2\cos 2x$$

$$y^{(2)} = -4\ sen\ 2x = -2^{2}\ sen\ 2x$$

$$y^{(3)} = -8\cos 2x = -2^{3}\cos 2x$$

$$y^{(4)} = 16\ sen\ 2x = 2^{4}\cos 2x$$

El problema en este caso lo podemos dividir en dos partes:

1.– Determinación del Coeficiente: El coeficiente se puede determinar en este caso como $2^{n}$ ; si hubiera sido la $f(x) = sen\ a\,x$ ; el coeficiente de la $y^{(n)}$ hubiera sido $a^{n}$.

2.– La función resultante: Se divide $n$ por $4$,

y si el residuo es $0$; la $f(x) = sen\ 2x$
si el residuo es $1$; la $f(x) = \cos 2x$
si el residuo es $2$; la $f(x) = -sen\ 2x$
si el residuo es $3$; la $f(x) = -\cos 2x$

Ejemplo, calcular la $y^{(37)}$ de $y = sen\,2x$

$$37 \div 4 = 9 \ (resto\ 1)$$

$$y^{(37)} = 2^{37} \cdot y^{(1)} = 2^{37} \cdot cos\,2x$$

**Ejercicio Nº 274**

Calcular las derivadas sucesivas de $y = e^{2x}$

$$y^0 = e^{2x}$$

$$y' = 2\,e^{2x}$$

$$y'' = 4\,e^{2x} = 2^2\,e^{2x}$$

$$y''' = 8\,e^{2x} = 2^3\,e^{2x}$$

y en general, $y^{(n)} = 2^n\,e^{2x}$

Si, $y^0 = e^{Kx}$ ; $y^{(n)} = K^n\,e^{Kx}$

**Ejercicio Nº 275**

Calcular las derivadas sucesivas de un producto de funciones de dos factores.

$$y = u \cdot v$$

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y'' = u''v + u'v' + u'v' + uv'' = u''v + 2\,u'v' + uv'' \quad (1)$$

$$y''' = u'''v + u''v' + 2\,(u''v' + u'v'') + u'v'' + uv'''$$

$$y^{III} = u^{III}\,v + 3\,u''v' + 3\,u'v'' + uv''' \quad (2)$$

Obsérvese que (1) se pudo escribir:



$$y^{(2)} = u^{(2)}\,v^{(0)} + 2\,u^{(1)}v^{(1)} + u^0\,v^2 \quad (3)$$

(2) se pudo escribir:

$$y^{(3)} = u^{(3)}v^{(0)} + 3\,u^{(2)}\,v^{(1)} + 3\,u^{(1)}v^{(2)} + v^{(3)} \quad (4)$$

Verifíquese la similitud de (3) y (4) con

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\,ab + b^2 = a^2b^0 + 2\,a^1b^1 + a^0\,b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3 = a^3b^0 + 3a^2b^1 + 3a^1b^2 + a^0b^3$$

En una palabra, coincide con el desarrollo del binomio de Newton, teniendo presente que en (3) y en (4) no aparecen potencias sino orden de derivadas.

**Ejercicio Nº 276**

Calcular la $y^{(4)}$ de $y = sen\,x \cdot e^x$

$$y^{(4)} = u^{(4)} \cdot v^{(0)} + 4\,u^{(3)}\,v^{(1)} + 6\,u^{(2)}\,v^{(2)} +$$

$$+ 4 \cdot u^{(1)} \cdot v^{(3)} + u^{(0)}\,v^{(4)} \quad (1)$$

$$u^0 = sen\,x \qquad v^{(0)} = e^x$$

$$u^{(1)} = cos\,x \qquad v^{(1)} = e^x$$

$$u^{(2)} = -\,sen\,x \qquad v^{(2)} = e^x$$

$$u^{(3)} = -\,cos\,x \qquad v^{(3)} = e^x$$

$$u^{(4)} = sen\,x \qquad v^{(4)} = e^x$$

Reemplazando todos estos valores en (1) nos queda:

$$y^{(4)} = sen\,x \cdot e^x + 4\,(-\,cos\,x)\,e^x + 6\,(-\,sen\,x)\,e^x + 4 \cdot cos\,x \cdot e^x$$

$$+ sen\, x \,.\, \ell^x = sen\, x \,.\, \ell^x - 4 \cos x\, \ell^x - 6\, sen\, x \,.\, \ell^x$$

$$+ 4 \cos x\, \ell^x + sen\, x \,.\, \ell^x = - 4\, sen\, x \,.\, \ell^x$$

VI. – Elasticidad de una función

Se ha visto que la derivada de una función es el $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. En una palabra,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

La elasticidad de una $f(x)$ es una relación de relaciones entre el incremento de la $f(x)$, y la $f(x)$, con el incremento de la variable independiente $(\Delta x)$ y la misma variable $(x)$, cuando $\Delta x \to 0$

$$E = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y \,.\, x}{\Delta x \,.\, y} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$E = \frac{x}{y} \,.\, y'$$

**Ejercicio Nº 277**

Calcular la elasticidad de una suma algebráica $y = u + v - w$

$$E = \frac{x}{u + v - w} \,.\, (u' + v' - w') = \frac{u'x + v'x - w'x}{u + v - w}$$

$$E = \frac{u \,.\, \frac{u'}{u} x + v \,.\, \frac{v'}{v} \,.\, x - w \,.\, \frac{w'}{w} \,.\, x}{u + v - w} \qquad (1)$$

Pero por definición $Eu = \frac{u'}{u} x$ ; $Ev = \frac{v'}{v} x$ ; $Ew = \frac{w'}{w} x$

Reemplazando estos valores en (1), nos queda,

$$E = \frac{uEu + vEv - wEw}{u + v - w}$$

*



**Ejercicio Nº 278**

Calcular la elasticidad de $y = K$ (constante)

$$y = K$$

$$E = \frac{x}{y} \,.\, K' = \frac{x}{y} \,.\, 0 = 0$$

**Ejercicio Nº 279**

Calcular la elasticidad de $y = x$

$$E = \frac{x}{y} \,.\, x' = \frac{x}{y} = \frac{x}{x} = 1$$

**Ejercicio Nº 280**

Calcular la elasticidad de $y = cx$

$$E = \frac{x}{cx} \,.\, (cx)' = \frac{x}{cx} \,.\, c = 1$$

**Ejercicio Nº 281**

Calcular la elasticidad de $y = u \,.\, v$

$$E = \frac{x}{u \,.\, v} (u\,v)' = \frac{(u'v + u\,v')\,x}{u \,.\, v} = \frac{u'v\,x}{u\,v} + \frac{u\,v'x}{u\,v}$$

$$= \frac{u'x}{u} + \frac{v'}{v} \,.\, x = Eu + Ev$$

**Ejercicio Nº 282**

Calcular la elasticidad de $y = u \,.\, v \,.\, w$

$$E = \frac{x}{u\,v\,w} \,.\, (u\,v\,w)' = \frac{x(u'v\,w + u\,v'w + u\,v\,w')}{u\,v\,w} =$$

$$= \frac{u'vwx + uv'wx + uvw'x}{uvw} = \frac{u'\cancel{v}\cancel{w}x}{u\cancel{v}\cancel{w}} + \frac{\cancel{u}v'\cancel{w}\cancel{x}}{\cancel{u}\,v\,\cancel{w}} +$$

$$+ \frac{\cancel{u}\cancel{v}w'x}{\cancel{u}\cancel{v}w} = Eu + Ev + Ew$$

**Ejercicio Nº 283**

Calcular la elasticidad de $y = \frac{u}{v}$

$$E = \frac{x}{\frac{u}{v}} \cdot \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{v\,.\,x}{u} \cdot \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{u'vx - uv'x}{uv}$$

$$E = \frac{u'vx}{uv} - \frac{uv'x}{uv} = Eu - Ev$$

Obsérvese que son más fáciles de recordar la elasticidad de un producto y la de un cociente, que la de una suma algebráica.

**Ejercicio Nº 284**

Calcular la elasticidad de $y = a^x$

$$E = \frac{x}{a^x} \cdot a^x \; La = xLa = La^x$$

**Ejercicio Nº 285**

Calcular la elasticidad de $y = \ell^x$

$$E = \frac{x}{\ell^x}\,\ell^x = x$$

**Ejercicio Nº 286**

Calcular la elasticidad de $y = \log_a x$



$$E = \frac{x}{\log_a x} \cdot \frac{1}{x} \log_a \ell = \frac{\log_a \ell}{\log_a x}$$

**Ejercicio Nº 287**

Calcular la elasticidad de $y = Lx$

$$E = \frac{x}{Lx} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{Lx}$$

**Ejercicio Nº 288**

Calcular la elasticidad de $y = sen\,x$

$$E = \frac{x}{sen\,x} \cdot \cos x = x \cdot cotg\,x$$

**Ejercicio Nº 289**

Calcular la elasticidad de $y = \cos x$

$$E = \frac{x}{\cos x} \cdot (-sen\,x) = -x\,tg\,x$$

**Ejercicio Nº 290**

Calcular la elasticidad de $y = tg\,x$

$$E = \frac{x}{tg\,x} \cdot \sec^2 x$$

**Ejercicio Nº 291**

Calcular la elasticidad de $y = L^2\sqrt{3x}$

$$E = \frac{x}{L^2\sqrt{3x}} \; . \; 2L\sqrt{3x} \; . \frac{1}{\sqrt{3x}} . \frac{1}{2\sqrt{3x}} \; . \; 3$$

$$E = \frac{3x}{3x \; . \; L\sqrt{3x}} = \frac{1}{L\sqrt{3x}}$$

Como se ha visto hasta ahora, el cálculo de elasticidades es muy simple; lo único que hay que saber, es aplicar la fórmula general

$$E = \frac{x}{f(x)} \; . \; f'(x)$$

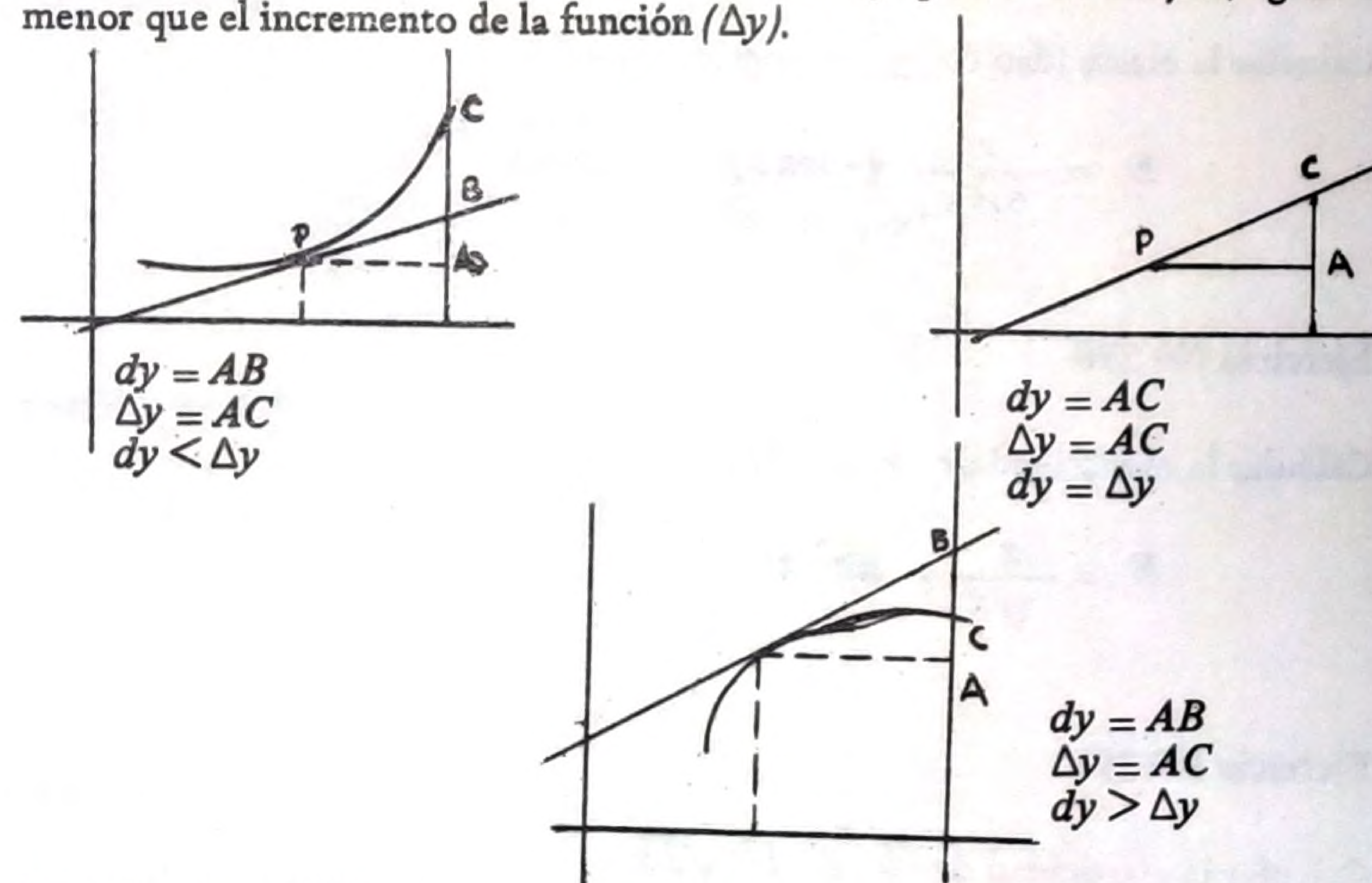
(y lógicamente, saber derivar).

VII. – Diferencial de una función

Recuérdese que el diferencial de una $f(x)$ (que se simboliza $dy$) es igual a $f'(x)$ . $dx$

$$dy = f'(x) \, . \, dx$$

Mientras la $f'(x)$ en un punto es igual a la tangente trigonométrica del ángulo formado por la recta tangente a la función en dicho punto y el sentido positivo del eje de las $x$, la $dy$ mide el aumento de la ordenada de esa recta tangente, cuando $x$ se incrementa en $\Delta x$. La $dy$ puede ser mayor, igual o menor que el incremento de la función $(\Delta y)$.




Las reglas de la diferenciación son similares a las de derivación.



**Ejercicio Nº 292**

Diferencial de una constante

$$dy = f'(x) \; . \; dx = c'dx = 0\,dx = 0$$

**Ejercicio Nº 293**

Diferencial de $y = x$

$$dy = x' \; . \; dx = 1\,dx = dx$$

**Ejercicio Nº 294**

$$y = u + v - w$$

$$dy = (u + v - w)'dx = (u' + v' - w')\,dx = u'dx + v'dx - w'dx =$$

$$= du + dv - dw$$

**Ejercicio Nº 295**

$$y = u \, . \, v$$

$$dy = (u\,v)'dx = (u'v + u\,v')\,dx = u'v\,dx + u\,v'\,dx$$

$$dy = v\,du + u\,d\,v$$

**Ejercicio Nº 296**

$$y = \frac{u}{v}$$

$$dy = \frac{u'v - u\,v'}{v^2}\,dx = \frac{u'v\,dx - u\,v'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

**Ejercicio Nº 297**

$y = a^x$

$$dy = a^x \; L\, a \; dx$$

**Ejercicio Nº 298**

$y = e^x$

$$dy = e^x \; dx$$

**Ejercicio Nº 299**

$y = L\, x$

$$dy = \frac{1}{x}\, dx = \frac{dx}{x}$$

**Ejercicio Nº 300**

$y = sen\, x$

$$dy = cos\, x\, dx$$

**Ejercicio Nº 301**

$y = cos\, x$

$$dy = -\, sen\, x\, dx$$

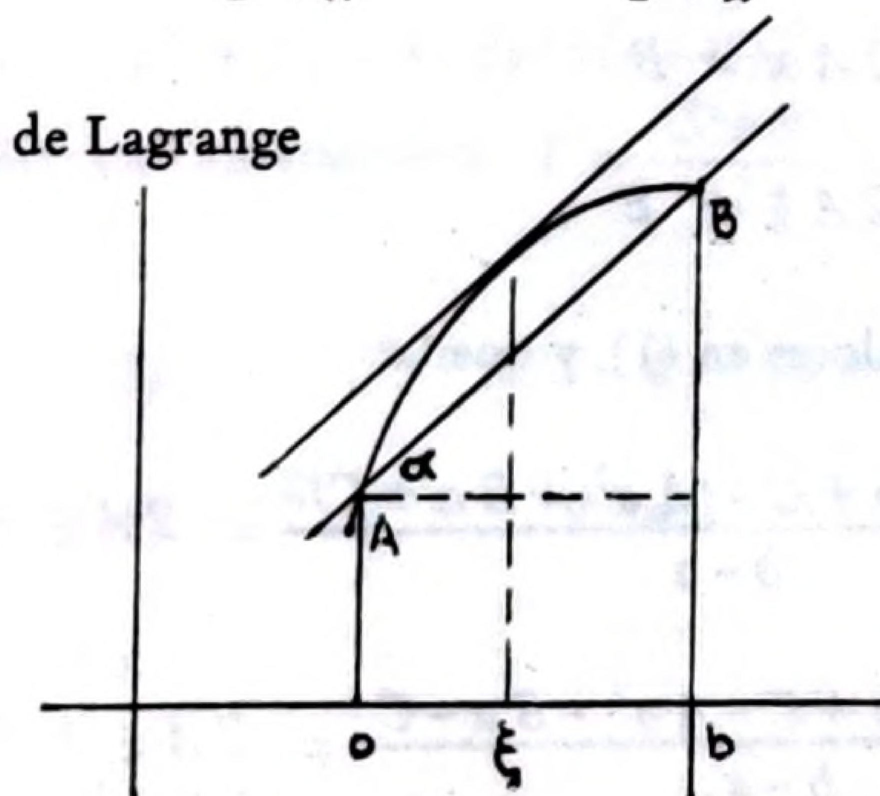
**Ejercicio Nº 302**

$y = arc\; tg\, x$



$$dy = \frac{1}{1+x^2}\, dx = \frac{dx}{1+x^2}$$

VIII. – Teorema de Lagrange




El teorema de Lagrange de los incrementos finitos dice que en toda curva regular, existe por lo menos un punto en que la tangente es paralela a la secante AB, dicho en otra manera,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

**Ejercicio Nº 303**

Calcular $\xi$ de la función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ dados $x_1 = a$ ; $x_2 = b$

El problema consiste en lo siguiente: se ha dado una $f(x)$ de segundo grado que como sabemos representa gráficamente una parábola de eje vertical, también tenemos dos puntos de la parábola cuyas abcisas son $a$ y $b$; si unimos ambos puntos tenemos una recta secante. Tenemos que determinar el punto (1) (cuya abcisa es $\xi$) en que la recta tangente a la función es paralela a la secante. Aplicamos la fórmula de Lagrange.

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (1)$$

$$f(x) = A x^2 + B x + C$$

$$f(a) = A a^2 + B a + C$$

*(1) de la parábola.*

$$f(b) = A b^2 + B b + C$$

$$f'(x) = 2 A x + B$$

$$f'(\xi) = 2 A \xi + B$$

Reemplazamos estos valores en (1), y queda:

$$\frac{A b^2 + B b + C - (A a^2 + B a + C)}{b - a} = 2 A \xi + B$$

$$\frac{A b^2 + B b + C - A a^2 - B a - C}{b - a} = 2 A \xi + B$$

$$\frac{A (b^2 - a^2) + B (b - a)}{b - a} = 2 A \xi + B$$

$$\frac{A (b + a)(b - a) + B (b - a)}{b - a} = 2 A \xi + B$$

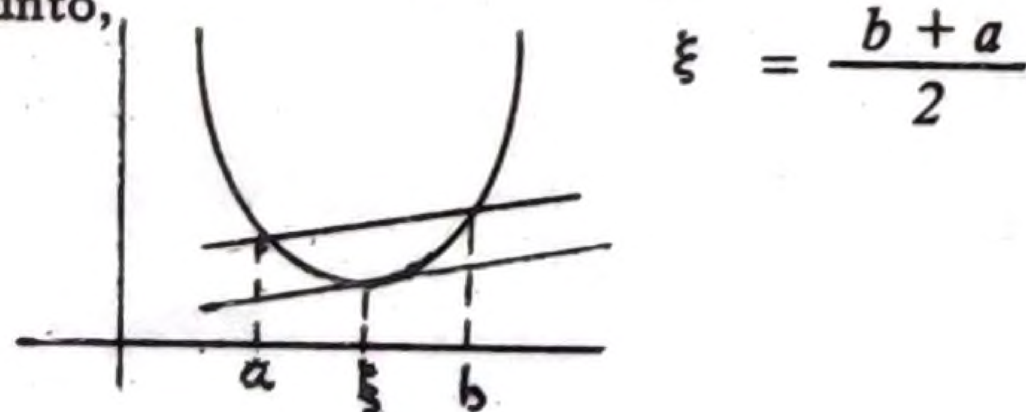
$$\frac{A (b + a)(b - a)}{b - a} + \frac{B (b - a)}{b - a} = 2 A \xi + B$$

$$A (b + a) + B = 2 A \xi + B$$

$$A (b + a) = 2 A \xi + B - B = 2 A \xi \quad \therefore$$

$$\frac{A (b + a)}{2 A} = \xi \quad \therefore \quad \xi = \frac{b + a}{2}$$

¿Qué significa el valor hallado? Que el punto $\xi$ tiene como abcisa a la semisuma de las abcisas de los puntos dados. En una palabra, dada una parábola de eje vertical, una secante cualquiera que una dos puntos de la misma; se puede trazar la tangente a la $f(x)$ que sea paralela a la secante, tomando el punto,




$$\xi = \frac{b + a}{2}$$



**Ejercicio Nº 304**

Hallar $\xi$ para $f(x) = 2 x^2 + 3 x - 4$ ; dados $a = 5$; $b = 9$.

Por aplicación del ejercicio anterior será $\xi = \frac{5 + 9}{2} = 7$. Por desarrollo tenemos,

$$f(a) = f(5) = 2 . 5^2 + 3 . 5 - 4 = 50 + 15 - 4 = 61$$

$$f(b) = f(9) = 2 . 9^2 + 3 . 9 - 4 = 162 + 27 - 4 = 185$$

$$f'(x) = 4 x + 3$$

$$f'(\xi) = 4 \xi + 3$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$\frac{185 - 61}{9 - 5} = 4 \xi + 3$$

$$\frac{124}{4} = 4 \xi + 3$$

$$31 = 4 \xi + 3$$

$$31 - 3 = 4 \xi$$

$$28 = 4 \xi$$

$$\frac{28}{7} = \xi = 7$$

**Ejercicio Nº 305**

Determinar el punto $\xi$ en el caso de la función $f(x) = \frac{1}{3} x^3 - x^2 - \frac{10}{3} x + 7$, en el intervalo $3 \leqslant x \leqslant 6$

$$f(3) = \frac{1}{3} 3^3 - 3^2 - \frac{10}{3} . 3 + 7 = 9 - 9 - 10 + 7 = -3$$

$$f(6) = \frac{1}{3}6^3 - 6^2 - \frac{10}{3}.6 + 7 = 72 - 36 - 20 + 7 = 23$$

$$f'(x) = x^2 - 2x - \frac{10}{3}$$

$$f'(\xi) = \xi^2 - 2\xi - \frac{10}{3}$$

$$\frac{23-(-3)}{6-3} = \xi^2 - 2\xi - \frac{10}{3}$$

$$\frac{26}{3} = \xi^2 - 2\xi - \frac{10}{3} \quad \therefore \quad \xi^2 - 2\xi - \frac{36}{3} = 0$$

$$3\xi^2 - 6\xi - 36 = 0 \quad \therefore \quad \xi = \frac{6 \pm \sqrt{36+432}}{6}$$

$$\xi = \frac{6 \pm \sqrt{468}}{6} = \frac{6 \pm \sqrt{36 . 13}}{6} = \frac{6 \pm 6\sqrt{13}}{6} = 1 \pm \sqrt{13}$$

En los puntos cuyas abcisas son $x_1 = 1 + \sqrt{13}$; $x_2 = 1 - \sqrt{13}$ se cumple el teorema de Lagrange, pero de acuerdo al intervalo fijado en el enunciado del problema debe descartarse $x_2$, por lo que únicamente se cumple para $x_1 = 1 + \sqrt{13}$ .

### Ejercicio Nº 306

Idem anterior $y = sen\, x$ en el intervalo $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

$$f(x) = sen\, x$$

$$f(0) = seno\, 0 = 0$$

$$f(\frac{\pi}{2}) = sen\frac{\pi}{2} = 1$$

$$f'(x) = cos\, x$$

$$f'(\xi) = cos\, \xi$$



$$\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}-0} = cos\,\xi \quad \therefore \quad cos\,\xi = \frac{2}{\pi} \cong \frac{2}{3{,}14} \cong 0{,}6369 \quad \therefore$$

$$\xi \cong 50^o\, 26'$$

### Ejercicio Nº 307

Idem anterior $f(x) = \sqrt{x-1}$ para $1 \leqslant x \leqslant 3$

$$f(1) = \sqrt{1-1} = 0$$

$$f(3) = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

$$f'(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}-0}{3-1} = \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{\xi-1}}$$

$$\frac{\sqrt{2}\,.\,\not{2}\sqrt{\xi-1}}{\not{2}} = 1 \quad \therefore \quad \sqrt{2}\sqrt{\xi-1} = 1$$

$$(\sqrt{2}\sqrt{\xi-1})^2 = 1^2 \quad \therefore \quad 2(\xi-1) = 1 \quad \therefore$$

$$2\xi - 2 = 1 \quad \therefore \quad 2\xi = 3 \quad \therefore \quad \xi = \frac{3}{2}$$

### Ejercicio Nº 308

Idem anterior $f(x) = e^x$ para $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$f(0) = e^0 = 1$$

$$f(1) = e^1 = e$$

$$f'(x) = e^x$$

$$f'(\xi) = e^\xi$$

$$\frac{e-1}{1-0} = e^\xi \quad \therefore \quad e-1 = e^\xi \quad \therefore$$

$$L(e-1) = L\,e^\xi = \xi L e = \xi \,.\, 1 = \xi \quad \therefore$$

$$\xi = L(e-1)$$

### Ejercicio Nº 309

Idem $y = L\,x$ para $1 \leqslant x \leqslant 2$

$$f(1) = L\,1 = 0$$

$$f(2) = L\,2$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(\xi) = \frac{1}{\xi}$$

$$\frac{L\,2-0}{2-1} = \frac{1}{\xi} = \frac{L\,2}{1} = L\,2 \quad \therefore \quad \xi = \frac{1}{L\,2}$$

### Ejercicio Nº 310

Idem $y = \frac{1}{x}$ para $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} = -1$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$



$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$$

$$\frac{1-(-1)}{1-(-1)} = -\frac{1}{\xi^2}$$

$$\frac{2}{2} = -\frac{1}{\xi^2} = 1 \quad \therefore \quad \xi^2 = -1 \quad \therefore \quad \xi = \sqrt{-1}$$

No existe solución para $\xi$ en el campo real. ¿Por qué? Porque la $f(x)$ a considerarse debe ser regular (que admita una sola derivada en todos sus puntos) en el intervalo elegido; para $x = 0$ (dentro del intervalo dado) la $f(x)$ no está definida .

Si hubiéramos tomado un intervalo cualquiera pero que no contuviera $x = 0$, el problema tiene solución.

### Ejercicio Nº 311

Idem anterior para $1 \leqslant x \leqslant 3$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'(\xi) = -\frac{1}{\xi^2}$$

$$\frac{\frac{1}{3}-1}{3-1} = -\frac{1}{\xi^2}$$

$$\frac{\frac{-2}{3}}{2} = -\frac{1}{\xi^2} \quad \therefore \quad -\frac{1}{3} = -\frac{1}{\xi^2} \quad \therefore \quad \xi^2 = 3 \quad \therefore \quad \xi = +\sqrt{3}$$

Se descarta $\xi = -\sqrt{3}$ pués el mismo no se encuentra dentro del intervalo fijado.

IX. – Límites Indeterminados. Regla de L'Hospital

Esta regla sirve para salvar el límite del cociente de dos funciones cuando ambas tiendan a $0$, si $x$ tiende a un valor dado. Se demuestra entonces que,

Si $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(a)}{g(a)} = \dfrac{0}{0}$ ; podemos hacer

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Debe observarse lo siguiente:

1. Se debe aplicar la derivada en el numerador y en el denominador en forma separada (no es la derivada de un cociente).
2. La regla se puede aplicar varias veces, pero una vez salvada la indeterminación, cesa su aplicación.
3. La regla es para indeterminaciones del tipo $\dfrac{0}{0}$ ; pero por sucesivas ampliaciones sirve para $\dfrac{\infty}{\infty}$ ; $\infty . 0$ ; $\infty - \infty$ ; $1^{\infty}$ ; $\infty^0$ ; $0^0$

Ejercicio Nº 312

Calcular el $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

Si reemplazamos, nos queda: $\dfrac{\text{sen}\, 0}{0} = \dfrac{0}{0}$

Se aplica L'Hospital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Ejercicio Nº 313

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, 5x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{5 \cos 5x}{1} = \frac{5 \cos 0}{1} = \frac{5 \, . \, 1}{1} = 5$$



Ejercicio Nº 314

$$\lim_{t \to 1} \frac{t^2 - 2t + 1}{3t^2 + 2t - 5} = \lim_{t \to 1} \frac{2t - 2}{6t + 2} = \frac{2 \, . \, 1 - 2}{6 \, . \, 1 + 2} = \frac{0}{8} = 0$$

Ejercicio Nº 315

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell^{2x} - \ell^{-2x} - 4x}{x - \text{sen}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{2\ell^{2x} + 2\ell^{-2x} - 4}{1 - \cos} \quad (1)$$

Si reemplazamos en (1) $x \to 0$ nos queda, $\dfrac{2\ell^0 + 2\ell^0 - 4}{1 - \cos 0} = \dfrac{2 + 2 - 4}{1 - 1} = \dfrac{0}{0}$

Debemos seguir aplicando la regla.

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{4\ell^{2x} - 4\ell^{-2x}}{\text{sen}\, x} \quad (2)$$

Si reemplazamos en (2) $x \to 0$ nos queda, $\dfrac{4\ell^0 - 4\ell^0}{\text{sen}\, 0} = \dfrac{4 - 4}{0} = \dfrac{0}{0}$

Seguimos aplicando la regla.

$$(2) = \lim_{x \to 0} \frac{8\ell^{2x} + 8\ell^{-2x}}{\cos x} = \frac{8 \, . \, \ell^0 + 8\ell^0}{1} = \frac{8 + 8}{1} = 16$$

Ejercicio Nº 316

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - \ell^{\text{sen}\, x}}{x - \text{sen}\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - \ell^{\text{sen}\, x} . \cos x}{1 - \cos x} \; (1) = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Sigue la indeterminación,

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - [\ell^{\text{sen}\, x} . \cos^2 x + \ell^{\text{sen}\, x} (-\text{sen}\, x)]}{\text{sen}\, x} \quad (2)$$

Ordenamos y nos queda:

$$(2) = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - \ell^{\text{sen}\, x} \cos^2 x + \ell^{\text{sen}\, x}\, \text{sen}\, x}{\text{sen}\, x} (3) = \frac{1 - 1 + 0}{0} = \frac{0}{0}$$

Sigue la indeterminación,

$$(3) = \lim_{x\to 0} \frac{\ell^{x} - [\ell^{sen\,x} \cos^3 x + \ell^{sen\,x} . 2 \cos x (- sen\, x)] +}{\cos x}$$

$$\frac{+ \ell^{sen\,x} \cos x\, sen\, x + \ell^{sen\,x} \cos x}{\cos x} =$$

$$= \frac{1 - (1 + 0) + 0 + 1}{1} = \frac{1 - 1 + 0 + 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

**Ejercicio Nº 317**

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\, x - x}{x - sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec x . \sec x\, tg\, x}{sen\, x} \quad (1)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x\, tg\, x}{sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2 (2 \sec x . \sec x\, tg\, x . tg\, x + \sec^2 x \sec^2 x)}{\cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{4 \sec^2 x\, tg^2 x + 2 \sec^2 x \sec^2 x}{\cos x} = \frac{0 + 2}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Obsérvese que en (1) tenemos, $\lim_{x\to 0} \frac{2 \sec x \sec x\, tg\, x}{sen\, x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x\, tg\, x}{sen\, x} \quad (2)$$

Pero sabemos que $x$, $sen\, x$ y $tg\, x$ son infinitesimos equivalentes ($x \sim sen\, x \sim tg\, x$), y por lo tanto se podrían simplificar entre sí. En esa forma se reducen todos los pasos siguientes. Es decir, cuando aplicamos la regla de L'Hospital, muchas veces haremos simplificaciones algebráicas, o también simplificaremos infinitésimos equivalentes.

Por lo que, $(2) = \lim_{x\to 0} \frac{2 \sec^2 x}{} = 2 . 1 = 2$

**Ejercicio Nº 318**

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{L\, sen\, x}{\pi - 2x} \; (1) = \frac{L\, sen\, \frac{\pi}{2}}{\pi - 2\, \frac{\pi}{2}} = \frac{L\, 1}{\pi - \pi} = \frac{0}{0}$$



$$(1) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{sen\, x} . \cos x}{-2} = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{cotg\, x}{-2} = \frac{cotg\, \frac{\pi}{2}}{-2} = \frac{0}{-2} = 0$$

**Ejercicio Nº 319**

$$\lim_{z\to 0} \frac{sen\, z + \ell^{z} - 1}{L(1 + z)} \; (1) = \frac{sen\, 0 + \ell^{0} - 1}{L\, 1} = \frac{0 + 1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$(1) = \lim_{z\to 0} \frac{\cos z + \ell^{z}}{\frac{1}{1+z}} = \frac{\cos 0 + \ell^{0}}{\frac{1}{1 - 0}} = \frac{1 + 1}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

**Ejercicio Nº 320**

$$\lim_{t\to 0} \frac{t - sen\, t}{t^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1 - \cos t}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{sen\, t}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

**Ejercicio Nº 321**

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{(1 - sen\, 2x) \sec^2 x}{1 + \cos 4x} \; (1) = \frac{(1 - sen\, \frac{\pi}{2}) \sec^2 \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \pi} = \frac{(1 - 1) \sec^2 \frac{\pi}{4}}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos L'Hospital,

$$(1) \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-2 \cos 2x \, . \, \sec^2 x + (1 - sen\, 2x)\, 2 . \sec x . \sec x\, tg\, x}{-4\, sen\, 4x} =$$

Ordenamos algebráicamente,

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-\cancel{2} \cos 2x \sec^2 x + \cancel{2} (1 - sen\, 2x) \sec^2 x\, tg\, x}{-\cancel{4}\, sen\, 4x}$$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{-\cos 2x \, . \, \sec^2 x + (1 - sen\, 2x) \sec^2 x\, tg\, x}{-2\, sen\, 4x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x \,.\, \sec^2 x - (1 - \operatorname{sen} 2x)\sec^2 x \operatorname{tg} x}{2 \operatorname{sen} 4x} \quad (2)$$

Sigue siendo una expresión indeterminada, pués si reemplazamos queda,

$$\frac{\cos\frac{\pi}{2}\sec^2\frac{\pi}{4} - (1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})\sec^2\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\operatorname{sen}\pi} =$$

$$= \frac{0 \,.\, \sec^2\frac{\pi}{4} - (1-1)\sec^2\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\,.\,0} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$$

Debemos por lo tanto seguir aplicando la regla; en esta situación deberíamos ver la posibilidad de simplificar infinitésimos equivalente, pero aparentemente no es posible. Pero previamente podremos dividir numerador y denominador por $\sec^2 x$ (para evitar de sacar la derivada de un producto de tres factores en el numerador que alargaría un poco el desarrollo).

$$(2) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - (1 - \operatorname{sen} 2x)\operatorname{tg} x}{\frac{2\operatorname{sen} 4x}{\sec^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x - (1 - \operatorname{sen} 2x)\operatorname{tg} x}{2\cos^2 x \,.\, \operatorname{sen} 4x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-2\operatorname{sen} 2x - [(-2\cos 2x)\operatorname{tg} x + (1 - \operatorname{sen} 2x)\sec^2 x]}{2[2\cos x(-\operatorname{sen} x)\operatorname{sen} 4x + \cos^2 x \,.\, \cos 4x \,.\, 4]} =$$

$$= \frac{-2\,.\,\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - [(-2\cos\frac{\pi}{2})\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + (1 - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2})\sec^2\frac{\pi}{4}}{2[2\cos\frac{\pi}{4}(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\operatorname{sen}\pi + \cos^2\frac{\pi}{4}\,.\,\cos\pi\,.\,4]} =$$

$$= \frac{-2\,.\,1 - [0\,.\,\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + (1-1)\sec^2\frac{\pi}{4}}{2[2\cos\frac{\pi}{4}(-\operatorname{sen}\frac{\pi}{4})\,0 + \cos^2\frac{\pi}{4}\,.\,(-1)\,4]} =$$

$$= \frac{-2 - [0+0]}{2[0 + \cos^2\frac{\pi}{4}(-4)]} =$$

$$= \frac{-2}{-8\cos^2\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4(\cos\frac{\pi}{4})^2} = \frac{1}{4(\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{1}{4\,\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

*



**Ejercicio Nº 322**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{2\operatorname{sen} x \,.\, \cos x} \quad (1)$$

En el denominador podemos hacer $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x \cos x$ (para evitar la derivada de un producto).

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{\sec^2 x - \cos x}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sec^2 x \operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x}{2\cos 2x} = \frac{0+0}{2} = 0$$

**Ejercicio Nº 323**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} 2x - \cos x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos x - \operatorname{sen} x}{2\cos 2x + \operatorname{sen} x} = \frac{-1}{2(-1)+1} =$$

$$= \frac{-1}{-2+1} = \frac{-1}{-1} = 1$$

**Ejercicio Nº 324**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x}{6x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x}{6} = \frac{-1}{6}$$

**Ejercicio Nº 325**

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

**Ejercicio Nº 326**

$$\lim_{x\to 0} \frac{(b+x)^x - b^x}{x^2} \quad (1)$$

Veamos a qué es igual la derivada de $y = (b+x)^x$

$$y = (b+x)^x$$

$$Ly = x \,.\, L(b+x)$$

$$\frac{y'}{y} = L(b+x) + x \,.\, \frac{1}{b+x} = L(b+x) + \frac{x}{b+x}$$

$$y' = y\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right] = (b+x)^x\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right]$$

Aplicando la regla en (1), quedará

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{(b+x)^x\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right] - b^x\, L\, b}{2x} \quad (2)$$

Si reemplazamos, queda:

$$\frac{b^0\left[L\, b + \frac{0}{b}\right] - b^0\, L\, b}{2\,.\,0} = \frac{L\, b - L\, b}{2\,.\,0} = \frac{0}{0}$$

Por lo que debemos aplicar la regla nuevamente.

$$(2) = \lim_{x\to 0} \frac{(b+x)^x\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right]\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right] +}{2}$$

$$\frac{+(b+x)^x\left[\frac{1}{b+x} + \frac{b+x-x}{(b+x)^2}\right] - b^x\,(Lb)^2}{2} \quad (3)$$

Obsérvese que la $D\,(b+x)^x = (b+x)^x\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right]$ y que la $D$

$b^x\, L\, b = b^x\,(L\, b)^2$ *(D: derivada)*

$$(3) = \lim_{x\to 0} \frac{(b+x)^x\left[L(b+x) + \frac{x}{b+x}\right]^2 +}{2}$$

$$\frac{+(b+x)^x\left[\frac{1}{b+x} + \frac{b}{(b+x)^2}\right] - b^x\,(L\, b)^2}{2}$$

Si reemplazamos, tenemos:

$$= \frac{(b+0)^0\left[L\, b + \frac{0}{b}\right]^2 + (b+0)^0\left[\frac{1}{b} + \frac{b}{(b+0)^2}\right] - b^0\,(L\, b)^2}{2}$$



$$= \frac{(L\, b)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{b}{b^2}\right) - (L\, b)^2}{2} = \frac{\frac{1}{b} + \frac{1}{b}}{2} = \frac{\frac{2}{b}}{2} = \frac{1}{b}$$

**Ejercicio Nº 327**

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,.\,\text{sen}\, x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}\, x + x\cos x}{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x + \cos x + x(-\text{sen}\, x)}{\cos x} =$$

$$= \frac{2}{1} = 2$$

Otra forma de resolver, hubiera sido:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\,\text{sen}\, x}{1 - \cos x} \quad (1)$$

Pero, $x \sim \text{sen}\, x$ (infinitésimos equivalentes), $\therefore$

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{x\,.\,x}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\text{sen}\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$$

**Ejercicio Nº 328**

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - \text{sen}\, x}}$$

Previo a la resolución veremos una transformación trigonométrica que debemos hacer en el denominador.

$$1 - \text{sen}\, x = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} - \text{sen}\, x \quad (1)$$

En (1) tenemos el caso $\text{sen}\, p - \text{sen}\, q$, que como sabemos es igual a

$$2\,\text{sen}\,\frac{p-q}{2}\,\cos\,\frac{p+q}{2}$$

si $p = \frac{\pi}{2}$; $q = x$

$$(1) = 2\,.\,\text{sen}\,\frac{\frac{\pi}{2} - x}{2}\,.\,\cos\frac{\frac{\pi}{2} + x}{2} = 2\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2.\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}.\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

pero, $\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ∴

$$(2) = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= 2\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\right)^2 - 2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{x}{2}\,\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2\right]$$

$$= 2\left[\frac{2}{4}\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \frac{2}{4}\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\right]$$

$$= \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \operatorname{sen}^2\frac{x}{2} = \left(\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 \therefore$$

$$1 - \operatorname{sen} x = \left(\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)^2 \quad \therefore \quad \sqrt{1 - \operatorname{sen} x} = \cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2} \quad \therefore$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos\frac{x}{2} - \operatorname{sen}\frac{x}{2}} \quad (3)$$

Si reemplazamos, $\dfrac{\cos\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \dfrac{0}{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{0}{0}$

Aplicamos la regla,

$$(3) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-\operatorname{sen} x}{-\operatorname{sen}\frac{x}{2}.\frac{1}{2} - \cos\frac{x}{2}.\frac{1}{2}}$$

Si ordenamos, nos queda:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen} x}{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}}$$



$$= \frac{\operatorname{sen}\frac{\pi}{2}}{\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{2\sqrt{2}}{4}} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

**Ejercicio Nº 329**

$$\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{2\operatorname{sen} t\cos t}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

**Ejercicio Nº 330**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x}{\cos x + \cos 2x} \quad (1)$$

Si reemplazamos, nos queda:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi}{\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{2}{3}\pi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \quad (1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sec^2 x + 2\sec^2 2x}{-\operatorname{sen} x - 2\operatorname{sen} 2x}$$

Si se reemplaza,

$$(2) = \frac{(\sec\frac{\pi}{3})^2 + 2(\sec\frac{2}{3}\pi)^2}{-\operatorname{sen}\frac{\pi}{3} - 2\operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi} = \frac{2^2 + 2\,.\,2^2}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{2}} =$$

$$= \frac{4 + 8}{-\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{-12}{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{-24}{3\sqrt{3}} = \frac{-8}{\sqrt{3}} = \frac{-8\sqrt{3}}{3}$$

*

### Ejercicio Nº 331

$$\lim_{x\to 0} \frac{tg\,x - sen\,x}{sen^3 x} = \lim_{x\to 0} \frac{sec^2 x - cos\,x}{3\,sen^2 x \cos x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,sec^2 x \,.\, tg\,x + sen\,x}{3(2\,sen\,x\,.\,cos^2 x - sen^2 x\,sen\,x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\,sec^2 x\; tg\,x + sen\,x}{6\,sen\,x\,cos^2 x - 3 sen^3 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,(2\,sec^2 x\; tg^2 x \;+\; sec^4 x) \;+\; cos\,x}{6\,[cos^3 x + sen\,x\,.\,2\,cos\,x\,(-\,sen\,x)] - 9\,sen^2 x\,.\,cos\,x} =$$

$$= \frac{2\,(0+1)+1}{6\,[\,1+0\,] - 0} = \frac{2+1}{6-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

### Ejercicio Nº 332

$$\lim_{x\to 0} \frac{arc\,sen\,x - x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - 1}{3\,x^2} \quad (1)$$

Ordenamos algebráicamente,

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - 1}{3\,x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{2}\,(1-x^2)^{-3/2}\,.\,(-2x)}{6x} =$$

$$= \frac{(1-0)^{-3/2}}{6} = \frac{1}{6}$$

### Ejercicio Nº 333

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x\,L\,.\,a}{b^x\,L\,b} = \frac{a^0\,L\,a}{b^0\,L\,b} = \frac{1\,L\,a}{1\,L\,b} = \frac{L\,a}{L\,b}$$

Ahora veremos indeterminaciones del tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

### Ejercicio Nº 334

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\,x} = 0$$



### Ejercicio Nº 335

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a\,x^4 - b}{a\,x^4 + b} = \lim_{x\to\infty} \frac{4\,a\,x^3}{4\,a\,x^3} = 1$$

### Ejercicio Nº 336

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{\ell^x} =$$ siendo $n$ número natural.

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{n\,x^{n-1}}{\ell^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\,(n-1)\,x^{n-2}}{\ell^x}$$

Y así sucesivamente sigue indeterminada; pero cuando apliquemos por enésima vez la regla, tendremos...

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\ell^x}$$ (Ver ejercicio Nº 263) *(1)*

Pero $n!$ es una constante; y por más grande que sea, al dividir por $\ell^x$, dará como cociente igual a $0$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\ell^x} = 0$$

### Ejercicio Nº 337

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\,x}{L\,sen\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{sen\,x}\,.\,cos\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{cos\,x}{sen\,x}} = \lim_{x\to 0} \frac{sen\,x}{x\,.\,cos\,x} \quad (1)$$

Como $x \sim sen\,x$ ; se puede simplificar $\therefore$

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{cos\,x} = \frac{1}{1} = 1$$

*

## Ejercicio Nº 338

$$\lim_{x\to 0} \frac{L\, tg\, x}{L\, sen\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{tg\, x} \cdot sec^2 x}{\frac{1}{sen\, x} \cdot cos\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{cotg\, x \,.\, sec^2 x}{cotg\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} sec^2 x = 1$$

## Ejercicio Nº 339

$$\lim_{x\to\infty} \frac{Lx}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{n\, x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x \,.\, n\, x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{n\, x^n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

## Ejercicio Nº 340

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\, x^{n-1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\,(n-1)\, x^{n-2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\,(n-1)(n-2)\, x^{n-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n\,(n-1)(n-2)(n-3) x^{n-4}} =$$

$$\ldots = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{n!} = \infty$$

Ver ejercicio Nº 336.

## Ejercicio Nº 341

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x + L\, x}{x\, L\, x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{L\, x + x\, \frac{1}{x}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

## Ejercicio Nº 342

$$\lim_{x\to 0} \frac{cotg\, x}{cotg\, 2\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\, cosec^2 x}{-\, 2\, cosec^2\, 2\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{sen^2\, x}}{2 \,.\, \frac{1}{sen^2\, 2\, x}} =$$



$$= \lim_{x\to 0} \frac{sen^2\, 2\, x}{2\, sen^2\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, sen\, 2\, x \,.\, cos\, 2\, x \,.\, 2}{2 \,.\, 2\, sen\, x \,.\, cos\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, sen\, 2\, x\, cos\, 2\, x}{2\, sen\, x\, cos\, x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2\, sen\, 2\, x\, cos\, 2\, x}{sen\, 2\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{2\, cos\, 2\, x}{} = 2 \,.\, 1 = 2$$

Recuérdese que $2\, sen\, x\, cos\, x = sen\, 2\, x$

## Ejercicio Nº 343

Veremos ahora el caso de indeterminación $\infty \,.\, 0$ que se reduce mediante una transformación a alguno de los casos ya vistos.

$$\lim_{x\to 0} x \,.\, cotg\, \frac{\pi}{2}\, x \quad (1)$$

Si reemplazamos quedaría $0 \,.\, cotg\, 0 = 0 \,.\, \infty$ ; para su resolución debemos pasar uno de los dos factores al denominador pero por su $f(x)$ inversa; en el caso que tengamos una $f(x)$ algebráica $(x)$ por una $f(x)$ trascendente $(cotg\, \frac{\pi}{2}\, x)$; conviene pasar siempre ésta.

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\frac{1}{cotg\, \frac{\pi}{2} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{tg\, \frac{\pi}{2}\, x} \quad (2)$$

Si reemplazamos ahora por el límite queda $(2) = \frac{0}{tg\, 0} = \frac{0}{0}$; por lo que el problema queda reducido a la primera indeterminación vista.

$$(2) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{sec^2\, \frac{\pi}{2}\, x \,.\, \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{sec^2\, 0 \,.\, \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{1 \,.\, \frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

## Ejercicio Nº 344

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (x - \frac{\pi}{2})\, tg\, x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{tg\, x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{cotg\, x} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\, cosec^2\, x} = \frac{1}{-\, cosec^2\, \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{-1} = -1$$

## Ejercicio Nº 345

$$\lim_{z\to a} (a-z)\ tg\,\frac{\pi z}{2a}\ (1) = (a-a)\ tg\,\frac{\pi a}{2a} = 0\ tg\,\frac{\pi}{2} = 0\ .\ \infty$$

$$(1) = \lim_{z\to a} \frac{a-z}{cotg\,\frac{\pi z}{2a}} = \lim_{z\to a} \frac{-1}{-cosec^2\,\frac{\pi z}{2a}\,.\,\frac{\pi}{2a}} = \frac{1}{cosec^2\,\frac{\pi}{2}\,.\,\frac{\pi}{2a}} =$$

$$= \frac{1}{1\,.\,\frac{\pi}{2a}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2a}} = \frac{2a}{\pi}$$

## Ejercicio Nº 346

$$\lim_{t\to\frac{\pi}{4}} sec\,2t\ .\ (1 - tg\,t) = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{1 - tg\,t}{cos\,2t} = \lim_{t\to\frac{\pi}{4}} \frac{-sec^2\,t}{-2\,sen\,2t} =$$

$$= \frac{sec^2\,\frac{\pi}{4}}{2\,sen\,\frac{\pi}{2}} = \frac{\frac{1}{cos^2\frac{\pi}{4}}}{2\,.\,1} = \frac{\frac{1}{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}}{2\,.\,1} = \frac{\frac{1}{\frac{2}{4}}}{2\,.\,1} = \frac{2}{2} = 1$$

## Ejercicio Nº 346 bis

$$\lim_{u\to\infty} u\,.\,sen\,\frac{1}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{sen\,\frac{1}{u}}{\frac{1}{u}} = \lim_{u\to\infty} \frac{cos\,\frac{1}{u}\,.\,(-\frac{1}{u^2})}{-\frac{1}{u^2}} =$$

$$= \lim_{u\to\infty} cos\,\frac{1}{u} = cos\,0 = 1$$

## Ejercicio Nº 347

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\,2x\,.\,cotg\,(\frac{\pi}{4} + x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{tg\,2x}{tg\,(\frac{\pi}{4} + x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\,sec^2\,2x}{sec^2\,(\frac{\pi}{4} + x)} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\,.\,\frac{1}{sec^2\,(\frac{\pi}{4} + x)}}{\frac{1}{sec^2\,2x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\ cos^2\,(\frac{\pi}{4} + x)}{cos^2\,2x} =$$



$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{2\,.\,2\,cos\,(\frac{\pi}{4} + 4x)\,[-sen\,(\frac{\pi}{4} + x)\,]}{2\,cos\,2x\,.\,(-sen\,2x)\,.\,2} = \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{cos\,(\frac{\pi}{4} + x)\ sen\,(\frac{\pi}{4} + x)}{cos\,2x\ .\ sen\,2x}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{-sen\,(\frac{\pi}{4} + x)\,sen\,(\frac{\pi}{4} + x) + cos\,(\frac{\pi}{4} + x)\,cos\,(\frac{\pi}{4} + x)}{-2\,sen\,2x\,sen\,2x\ +\ cos\,2x\ .\ cos\,2x\ .\,2} = \frac{-1 + 0}{-2 + 0} = \frac{1}{2}$$

## Ejercicio Nº 348

$$\lim_{x\to a} (1 - \frac{x}{a})\,cotg\,\frac{\pi x}{a} = \lim_{x\to a} \frac{1 - \frac{x}{a}}{tg\,\frac{\pi x}{a}} = \lim_{x\to a} \frac{-\frac{1}{a}}{sec^2\,\frac{\pi x}{a}\,.\,\frac{\pi}{a}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{a}}{sec^2\pi\ \frac{\pi}{a}} = \frac{-1/a}{-1\,.\,\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\pi}$$

Ahora veremos el caso de la indeterminación $\infty - \infty$. Los alumnos deben prestar atención en este caso pués generalmente es el más difícil de todos. Para lo cual se debe hacer esta transformación:

$$m - n = \frac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{n}\,.\,\frac{1}{m}} = \frac{\frac{m-n}{n\,m}}{\frac{1}{n\,.\,m}} = m - n$$

Es decir que al hacer $m - n = \dfrac{\frac{1}{n} - \frac{1}{m}}{\frac{1}{n}\,.\,\frac{1}{m}}$, la indeterminación $\infty - \infty$ se transforma como $\dfrac{0 - 0}{0\,.\,0} = \dfrac{0}{0}$ que es otra indeterminación, que se resuelve como ya sabemos.

## Ejercicio Nº 349

$$\lim_{x\to 0} (cotg\,x - \frac{1}{x})\ (1)$$

$$m = cotg\,x \quad \therefore \quad \frac{1}{m} = tg\,x$$

$$n = \frac{1}{x} \therefore \frac{1}{n} = x$$

Por lo tanto,

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{x - tg\, x}{x\, .\, tg\, x} = \lim \frac{1 - sec^2\, x}{tg\, x + x\, .\, sec^2\, x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\,2\, sec^2\, x\; tg\, x}{sec^2\, x + sec^2\, x + x\, .\, 2\, sec^2\, x\; tg\, x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-\,2\, sec^2 x\; tg\, x}{2\, sec^2\, x + 2\, sec^2\, x\, .\, tg\, x\, .\, x}$$

Simplificando $2\, sec^2\, x$ , queda,

$$(2) = \lim_{x \to 0} \frac{-\, tg\, x}{1 + x\; tg\, x} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

**Ejercicio Nº 350**

$$\lim \left(\frac{1}{t} - cotg\, t\right) \quad (1)$$

Hacemos $m = \frac{1}{t} \therefore \frac{1}{m} = t$

$$n = cotg\, t \quad \therefore \frac{1}{n} = tg\, t$$

$$(1) = \lim_{t \to 0} \frac{tg\, t - t}{tg\, .\, t\, .\, t} = \lim_{t \to 0} \frac{t - t}{t^2} = 0$$

Recuérdese que $t \sim tg\, t$ (son infinitésimos equivalentes)

**Ejercicio Nº 351**

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ell^x - 1}\right) \quad (1)$$

$$m = \frac{1}{x} \therefore \frac{1}{m} = x$$



$$n = \frac{1}{\ell^x - 1} \quad \therefore \frac{1}{n} = \ell^x - 1$$

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - 1 - x}{(\ell^x - 1)\; x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - 1 - x}{\ell^x\, x - x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x - 1}{\ell^x\, x + \ell^x - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\ell^x}{\ell^x\, x + \ell^x + \ell^x} = \frac{1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

**Ejercicio Nº 352**

$$\lim_{x \to 0} (cosec\, x - cotg\, x) \quad (1)$$

$$m = cosec\, x \quad \therefore \frac{1}{m} = sen\, x$$

$$n = cotg\, x \quad \therefore \frac{1}{n} = tg\, x$$

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{tg\, x - sen\, x}{tg\, x\; .\; sen\, x} = \lim_{x \to 0} \frac{sec^2\, x - cos\, x}{sec^2 x\; sen\, x + tg\, x\, .\, cos\, x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\, sec^2\, x\, .\, tg\, x + sen\, x}{2\, sec^2\, x\; tg\, x\; sen\, x + sec^2\, x\, .\, cos\, x + tg\, x\, (-\, sen\, x) + sec^2 x\, .\, cos\, x} =$$

Cuando $x \to 0$ ; $sen\, x \to 0$ ; $tg\, x \to 0$ $\therefore$

$$(2) = \frac{0 + 0}{0 + 1 + 0 + 1} = \frac{0}{2} = 0$$

**Ejercicio Nº 353**

$$\lim_{t \to 0} \left(\frac{1}{t^3} - cotg^2\, t\right) \quad (1)$$

$$m = \frac{1}{t^3} \;\therefore\; \frac{1}{m} = t^3$$

$$n = cotg^2\, t \;\therefore\; \frac{1}{n} = tg^2\, t$$

$$(1) = \lim_{t \to 0} \frac{tg^2\, t - t^3}{tg^2\, t \,.\, t^3}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2\, tg\, t \sec^2 t - 3\, t^2}{2\, tg\, t \sec^2 t \,.\, t^3 + 3\, tg^2\, t \,.\, t^2} \qquad (2)$$

Como *tg t* y *t* son dos infinitésimos equivalentes, se puede reemplazar *tgt* por *t*, a los efectos de abreviar los cálculos.

$$(2) = \lim_{t \to 0} \frac{2\, t \,.\, \sec^2 t - 3t^2}{2\, t \,.\, \sec^2 t \,.\, t^3 + 3 \,.\, t^2 \,.\, t^2} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2\, t \,.\, \sec^2\, t - 3\, t^2}{2t^4 \sec^2\, t + 3\, t^4} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{2 \,.\, \sec^2 t + 2t \,.\, 2 \sec^2 t \,.\, tg\, t - 6\, t}{8\, t^3 \sec^2 t + 2\, t^4 \,.\, 2 \sec^2 t\, tg\, t + 12\, t^3} = \frac{2 + 0 - 0}{0 + 0 + 0} = \infty$$

**Ejercicio Nº 354**

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{1}{L\,(1 + x)} - \frac{1}{x}\right] \quad (1)$$

$$m = \frac{1}{L\,(1 + x)} \;\therefore\; \frac{1}{m} = L\,(1 + x)$$

$$n = \frac{1}{x} \;\therefore\; \frac{1}{n} = x$$

$$(1) = \lim_{x \to 0} \frac{x - L\,(1 + x)}{x \,.\, L\,(1 + x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - \frac{1}{1 + x}}{L\,(1 + x) + \frac{x}{1 + x}} \qquad (2)$$

Sacando denominador común en el numerador y denominador de (2), queda:



$$(2) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1 + x - 1}{1 + x}}{\frac{(1 + x)\, L\, (1 + x) + x}{1 + x}} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1 + x)\, L\, (1 + x) + x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{L\,(1 + x) + \frac{(1 + x)}{1 + x} + 1} = \frac{1}{0 + 1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Ahora veremos los casos de indeterminación de los tipos $0^0$; $1^\infty$; $\infty^0$. La resolución en estos casos es prácticamente igual; hay que tomar primero logaritmos naturales, y luego aplicar la regla de L'Hospital.

**Ejercicio Nº 355**

$$\lim_{x \to 0} x^x$$

Llamamos $y = x^x \;\therefore\; Ly = L\,x^x = x\,L\,x \;\therefore$

$$\lim_{x \to 0} L\,y = \lim_{x \to 0} x \,.\, L\,x \qquad (1)$$

En el segundo miembro de (1) tenemos un límite de la forma $0 \,.\, \infty$ que se resuelve en la forma ya vista. $\therefore$

$$\lim_{x \to 0} Ly = \lim_{x \to 0} x \,.\, Lx = \lim_{x \to 0} \frac{Lx}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \to 0} -x = 0$$

Se observa entonces que $\lim_{x \to 0} Ly = 0 \;\therefore\; Ly = 0 \;\therefore$

Por definición de logaritmo $y = e^0 = 1$

En una palabra, el $\lim_{x \to 0} x^x$, es igual a *1*.

*

**Ejercicio Nº 356**

$$\lim_{x\to 0}\ [L(1+x)]^{sen\, x}$$

Hacemos $y = [L(1+x)]^{sen\, x} \quad \therefore \quad Ly = sen\, x \,.\, L\,[L(1+x)]$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0}\ sen\, x\,.\,L\,[L(1+x)] =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{L\,[L(1+x)]}{cosec\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{L(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}}{-cosec\, x\, cotg\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{L(1+x)}\cdot\frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{sen\, x}\cdot\frac{cos\, x}{sen\, x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-sen^2 x}{[L(1+x)](1+x)\,.\,cos\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen\, x\,.\,sen\, x}{(1+x)\,cos\, x\,.\,L(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-tg\, x\,.\,sen\, x}{(1+x)\,L(1+x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sec^2 x\,.\,sen\, x - tg\, x\, cos\, x}{L(1+x) + (1+x)\,.\,\frac{1}{1+x}} = \frac{-0-0}{0+1} = 0 \quad \therefore$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 357**

$$\lim_{x\to 0}\ (sen\, x)^{tg\, 2x}$$

$$y = (sen\, x)^{tg\, 2x} \quad \therefore \quad Ly = tg\, 2x\,.\,L\, sen\, x$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0}\ tg\, 2x\,.\,L\, sen\, x = \lim_{x\to 0} \frac{L\, sen\, x}{cotg\, 2x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{sen\, x}\cdot cos\, x}{-2\, cosec^2\, 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{cos\, x}{sen\, x}}{-2\,.\,\frac{1}{sen^2 2x}} = \lim_{x\to 0} \frac{cos\, x\,.\,sen^2 2x}{-2\, sen\, x} =$$



$$= \lim_{x\to 0} \frac{-sen\, x\,.\,sen^2\, 2x + cos\, x\,.\,2\, sen\, 2x\,.\,cos\, 2x\,.\,2}{-2\, cos\, x} = \frac{0+0}{-2} = 0$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

Obsérvese que en lugar de aplicar la regla en $\frac{cotg\, x}{-2\, cosec^2\, 2x}$, se puso esta expresión en función de senos y cosenos, y luego se siguió el procedimiento; ello es así, y se recomienda ésto, en razón de que es más fácil la derivación de éstas últimas funciones, que la derivación de cosecantes, pués en este caso la función se transforma luego de algunas pocas derivadas sucesivas, en funciones cuyas derivadas son sumamente engorrosas.

**Ejercicio Nº 358**

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}} \quad \therefore \quad Ly = \frac{1}{x^2}\, L\, \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}\, L\, \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,\frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x\,.\,(-\frac{1}{x^2})}{2x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{2} = 0 \quad \therefore \quad Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 359**

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

$$y = \left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{1}{x}} \quad \therefore \quad Ly = \frac{1}{x}\, L\, \frac{1}{x^2} = \frac{L\,\frac{1}{x^2}}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,\frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\,.\,(-\frac{2}{x^3})}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2}{x} = 0$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 360**

$$\lim_{x\to 0} \; [L\,(1+x)]^x$$

$$y = [L\,(1+x)]^x$$

$$Ly = x\,L\,L\,(1+x) = \frac{L\,L\,(1+x)}{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0} \frac{L\,L\,(1+x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{L\,(1+x)} \cdot \frac{1}{1+x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{(1+x)\,L\,(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x}{L\,(1+x)+(1+x)\,.\,\frac{1}{1+x}} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 361**

$$\lim_{x\to 0} \; (\ell^x - 1)^{L\,(1+x)}$$

$$y = (\ell^x - 1)^{L\,(1+x)} \quad \therefore \quad Ly = L\,(1+x)\,.\,L\,(\ell^x - 1)$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0} L\,(1+x)\,.\,L\,(\ell^x-1) = \lim_{x\to 0} \frac{L\,(\ell^x-1)}{\frac{1}{L\,(1+x)}}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\ell^x-1}\cdot \ell^x}{\frac{-\frac{1}{1+x}}{L^2\,(1+x)}} \; (1)$$ Ordenamos algebráicamente

$$(1) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ell^x}{\ell^x-1}}{\frac{-1}{(1+x)\,L^2\,(1+x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{\ell^x\,(1+x)\,L^2\,(1+x)}{-\ell^x+1} \; (2)$$

Aplicamos L'Hospital



$$(2) = \lim_{x\to 0} \frac{\ell^x\,(1+x)\,L^2\,(1+x) + \ell^x\,L^2\,(1+x) + \ell^x\,(1+x)\,2\,L\,(1+x)\,\frac{1}{1+x}}{-\ell^x} \; (3)$$

Obsérvese en (2) que el numerador tiene un producto de tres factores cuya derivada como sabemos es $u'\,v\,w + u\,v'\,w + u\,v\,w'$. Por otra parte en (3) nos queda $\frac{0}{-1} = 0$, pués $L^2\,(1+x)$, y $L\,(1+x)$ son iguales a $0$ cuando $x\to 0$.

**Ejercicio Nº 362**

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

Estamos en presencia de la indeterminación del tipo $1^\infty$, que se resuelve en la misma forma que el caso anterior.

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \quad \therefore \quad Ly = x\,L\left(1+\frac{1}{x}\right) \quad \therefore$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x\,L\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$\therefore \quad Ly = 1 \quad \therefore \quad y = \ell^1 = \ell$$

**Ejercicio Nº 363**

$$\lim_{x\to\infty} \left(1-\frac{p}{x}\right)^x$$

$$y = \left(1-\frac{p}{x}\right)^x \quad \therefore \quad Ly = L\left(1-\frac{p}{x}\right)^x = x\,L\left(1-\frac{p}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x\,L\left(1-\frac{p}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\left(1-\frac{p}{x}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1-\frac{p}{x}} \cdot \frac{p}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1-\frac{p}{x}} \cdot \frac{\frac{p}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} =$$

$$= -p \quad \therefore \quad Ly = -p \quad \therefore \quad y = \ell^{-p} = \frac{1}{\ell^p}$$

**Ejercicio Nº 364**

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{8}{x})^x$$

$$y = (1+\frac{8}{x})^x \quad \therefore \quad Ly = x\,L\,(1+\frac{8}{x})$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x\,L\,(1+\frac{8}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,(1+\frac{8}{x})}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{8}{x}} \cdot (-\frac{8}{x^2})}{-\frac{1}{x^2}} = 8 \quad \therefore \quad Ly = 8 \quad \therefore \quad y = \ell^8$$

**Ejercicio Nº 365**

$$\lim_{x\to 0} (\cos x)^{cotg\, x}$$

$$y = (\cos x)^{cotg\, x} \quad \therefore \quad Ly = cotg\, x \,.\, L \cos x$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0} cotg\, x \,.\, L\cos x = \lim_{x\to 0} \frac{L \cos x}{tg\, x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\,sen\, x)}{tg\, x} = \lim_{x\to 0} \frac{-\,tg\, x}{tg\, x} = -1 \quad \therefore$$

$$Ly = -1 \quad \therefore \quad y = \ell^{-1} = \frac{1}{\ell}$$



**Ejercicio Nº 366**

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{p}{x^2})^x$$

$$y = (1+\frac{p}{x^2})^x \quad \therefore \quad Ly = x\,L\,(1+\frac{p}{x^2})$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x\,L\,(1+\frac{p}{x^2}) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,(1+\frac{p}{x^2})}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{p}{x^2}} \cdot (-\frac{p}{x^3})}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{p}{x^2}} \cdot \frac{p\,x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{p}{x^3}} \cdot \frac{p}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{p}{x} = 0 \quad \therefore$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 367**

$$\lim_{x\to\infty} (1+\frac{7}{x})^{2\,x}$$

$$y = (1+\frac{7}{x})^{2\,x} \quad \therefore \quad Ly = 2\,x\,L\,(1+\frac{7}{x})$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} 2\,x \,.\, L\,(1+\frac{7}{x}) = \lim_{x\to\infty} \frac{L\,(1+\frac{7}{x})}{\frac{1}{2\,x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{7}{x}} \cdot (-\frac{7}{x^2})}{-\frac{1}{2\,x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{7}{x}}\, 14 \qquad \therefore\; Ly = 14 \;\therefore$$

$$y = \ell^{14}$$

*

**Ejercicio Nº 368**

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x^2}$$

$$y=\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x^2} \quad \therefore \quad Ly = x^2 L\left(1-\frac{3}{x}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x^2 L\left(1-\frac{3}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{L\left(1-\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\cdot\left(\frac{3}{x^2}\right)}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\cdot\frac{3x^3}{-2x^2} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{3}{x}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{-2} = 1.(-\infty) = -\infty$$

$$Ly = -\infty \quad \therefore \quad y = \ell^{-\infty} = \frac{1}{\ell^{\infty}} = 0$$

**Ejercicio Nº 369**

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{cosec} x}$$

$$y = (1+x)^{\operatorname{cosec} x} \quad \therefore \quad Ly = \operatorname{cosec} x\, L(1+x)$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0}\operatorname{cosec} x\,.\,L(1+x) = \lim_{x\to 0}\frac{L(1+x)}{\operatorname{sen} x} =$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1 \quad \therefore \quad Ly = 1 \quad \therefore \quad \ell^1 = \ell$$

**Ejercicio Nº 370**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{nx+2}{nx-2}\right)^x \quad (1)$$



Vamos a escribir la expresión dada en otra forma para lo cual hacemos previamente el cociente indicado en la base

$$(1) = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{nx-2}\right)^x \quad (2)$$

Estamos en presencia de un límite indeterminado del tipo $1^{\infty}$, y procedemos en consecuencia.

$$y=\left(1+\frac{4}{nx-2}\right)^x \quad \therefore \quad Ly = x\,L\left(1+\frac{4}{nx-2}\right) \quad \therefore$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} x\,L\left(1+\frac{4}{nx-2}\right) =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{L\left(1+\frac{4}{nx-2}\right)}{\frac{1}{x}} =$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{4}{nx-2}}\cdot\frac{-4\,.\,n}{(nx-2)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{nx-2}}\lim_{x\to\infty}\frac{4nx^2}{(nx-2)^2} \quad (3)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{nx-2}} = \frac{1}{1+0} = 1 \quad (4)$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4nx^2}{n^2x^2-4nx+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{8nx}{2n^2x-4n} = \lim_{x\to\infty}\frac{8n}{2n^2} = \frac{4}{n} \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (3) nos queda

$$(3) = 1\,.\frac{4}{n} = \frac{4}{n} \quad \therefore \quad Ly = \frac{4}{n} \quad \therefore \quad y = \ell^{\frac{4}{n}} = \sqrt[n]{\ell^4}$$

**Ejercicio Nº 371**

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+1}\right)^{2x} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x}$$

$$y=\left(1+\frac{2}{x+1}\right)^{2x} \quad \therefore \quad Ly = 2x\,L\left(1+\frac{2}{x+1}\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} Ly = \lim_{x\to\infty} 2x\,L\left(1+\frac{2}{x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{L\left(1+\frac{2}{x+1}\right)}{\frac{1}{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{2}{x+1}}\cdot\frac{-2}{(x+1)^2}}{\frac{-1}{2x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{x+1}}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{(x+1)^2} = \lim_{x\to\infty} 1 \cdot \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2}{x^2+2x+1}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{8x}{2x+2} = \lim_{x\to\infty}\frac{8}{2} = 4 \quad \therefore \quad Ly = 4 \quad \therefore$$

$$y = \ell^4$$

**Ejercicio Nº 372**

$$\lim_{x\to 0} (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$$

Este es el último caso de indeterminación a verse $\infty^0$. Su solución es similar a los dos últimos casos vistos.

$$y = (\operatorname{cotg} x)^{\operatorname{sen} x}$$

$$Ly = \operatorname{sen} x\, L \operatorname{cotg} x$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x\, L \operatorname{cotg} x = \lim_{x\to 0}\frac{L \operatorname{cotg} x}{\operatorname{cosec} x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{cotg} x}\cdot(-\operatorname{cosec}^2 x)}{-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg} x} \qquad (1)$$

Haciendo transformaciones algebráicas, nos queda

$$(1) = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{cosec}^2 x}{-\operatorname{cosec} x \cdot \operatorname{cotg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{cosec} x}{\operatorname{cotg}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}{\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}}$$



$$= \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \frac{0}{1} = 0 \quad \therefore$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 373**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x}$$

$$y = \left(\frac{1}{x}\right)^{\operatorname{sen} x} \quad \therefore \quad Ly = \operatorname{sen} x\, L\frac{1}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} Ly = \lim_{x\to 0}\operatorname{sen} x\, L\frac{1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{L\frac{1}{x}}{\operatorname{cosec} x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} \qquad (1)$$

Operando algebráicamente en (1), nos queda

$$(1) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cdot\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{sen} x}{\cos x \cdot x} = \lim_{x\to 0}\operatorname{tg} x \cdot \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= 0 \cdot 1 = 0 \quad \therefore \quad Ly = 0 \quad \therefore \quad y = \ell^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 374**

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}$$

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\cos x} \quad \therefore \quad Ly = \cos x\, L \operatorname{tg} x$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot L \operatorname{tg} x = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L \operatorname{tg} x}{\sec x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x}\cdot\sec^2 x}{\sec x \cdot \operatorname{tg} x} \qquad (1)$$

Ordenando algebráicamente, nos queda:

$$(1) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{\sec x \cdot tg^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sec x}{tg^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{sen^2 x}{\cos^2 x}} =$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot sen^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{sen^2 x} = \frac{0}{1} = 0 \therefore$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = e^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 375**

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{Lx}\right)^{x-1}$$

$$y = \left(\frac{1}{Lx}\right)^{x-1} \quad \therefore \quad Ly = (x-1)\,L\left(\frac{1}{Lx}\right)$$

$$\lim_{x\to 1} Ly = \lim_{x\to 1} (x-1)\,L\left(\frac{1}{Lx}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{L\left(\frac{1}{Lx}\right)}{\frac{1}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{Lx \cdot \frac{-\frac{1}{x}}{(Lx)^2}}{\frac{-1}{(x-1)^2}} \qquad (1)$$

Ordenando algebráicamente, queda en (1)

$$(1) = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x\,L\,x}}{\frac{1}{(x-1)^2}} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x\,L\,x} = \lim_{x\to 1} \frac{2\,(x-1)}{Lx + x \cdot \frac{1}{x}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 0}{0+1} = \frac{0}{1} = 0 \quad \therefore \quad Ly = 0 \quad \therefore \quad y = e^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 376**

$$\lim_{x\to 0} (Lx)^x$$



$$y = (Lx)^x \quad \therefore \quad Ly = x\,L\,L\,x \quad \therefore \quad \lim_{x\to 0} Ly =$$

$$= \lim_{x\to 0} x\,L\,L\,x = \lim_{x\to 0} \frac{L\,L\,x}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{Lx} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x\,L\,x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{L\,x} = \frac{0}{-\infty} = 0$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = e^0 = 1$$

**Ejercicio Nº 377**

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x}$$

$$y = \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1-x} \quad \therefore \quad Ly = (1-x)\,L\left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$\lim_{x\to 1} Ly = \lim_{x\to 1} (1-x)\,L\left(\frac{1}{1-x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{L\left(\frac{1}{1-x}\right)}{\frac{1}{1-x}} =$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1-x) \cdot \frac{1}{(1-x)^2}}{\frac{1}{(1-x)^2}} = \lim_{x\to 1} (1-x) = 0$$

$$Ly = 0 \quad \therefore \quad y = e^0 = 1$$

X. – Fórmulas de Mac Laurin y Taylor

Estas fórmulas sirven para aproximar funciones trascendentes a funciones algebráicas (generalmente polinomios). Es decir, mediante éstas fórmulas se pueden transformar en forma aproximada funciones trigonométricas, logarítmicas, exponenciales, etcétera, en funciones algebráicas (polinomios).

*

**Ejercicio Nº 378**

Desarrollo de $f(x) = sen\ x$

$f(x) = sen\ x$ si $x = 0$ ∴ $f(0) = sen\ 0 = 0$

$f'(x) = cos\ x$ si $x = 0$ ∴ $f'(0) = cos\ 0 = 1$

$f''(x) = -sen\ x$ si $x = 0$ ∴ $f''(0) = -sen\ 0 = 0$

$f^{III}(x) = -cos\ x$ si $x = 0$ ∴ $f^{III}(0) = -cos\ 0 = -1$

$f^{IV}(x) = sen\ x$ si $x = 0$ ∴ $f^{IV}(0) = sen\ 0 = 0$

El procedimiento es así:

1. Se sacan las derivadas sucesivas de la función dada.
2. Se reemplaza en la función y en sus derivadas para $x = 0$.
   En este caso se observa que la $f(0)$ y todas las derivadas pares para $x = 0$, son todas nulas; las derivadas impares son alternativamente iguales a $1$ y $-1$.

Recordemos que la fórmula de Mac Laurin es

$$f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + f''(0) \cdot \frac{x^2}{2!} + f'''(0)\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\ldots + \overset{(n-1)}{f}(0) \cdot \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \overset{(n)}{f}(0)\ \frac{x^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

Reemplazando los valores hallados en (1), nos queda:

$$sen\ x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots + R(x)$$

En el segundo miembro tenemos una serie de potencias; se demuestra que la misma es convergente para todo $x$ (por eso se la llama serie entera).

$R(x)$ es lo que se llama Resto de la serie; en este caso a medida que tomamos más términos de la serie, $R(x) \to 0$. Es decir, cuantos más términos del desarrollo tenemos, más exactitud tendremos.

Antes de seguir avanzando, obvio es que cuando decimos $sen\ x$, estamos expresando el ángulo $(x)$ en el sistema circular (radian).



**Ejercicio Nº 379**

Calcular $sen\ 1$. Por aplicación de la fórmula anterior será,

$$sen\ 1 = 1 - \frac{1^3}{3!} + \frac{1^5}{5!} - \frac{1^7}{7!} + \ldots$$

$$sen\ 1 = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} + \frac{1}{362800} -$$

Haciendo las operaciones indicadas tenemos calculado el seno de un radian (o su equivalente en el sistema sexagesimal 57º 19' aproximadamente).

Obsérvese que los términos van disminuyendo muy rápidamente; cuantos más tomemos más exactitud tendrá el cálculo.

**Ejercicio Nº 380**

Calcular seno 30º

Debemos primero convertir 30º al sistema circular,

$$90º \ \text{———} \ \frac{\pi}{2}$$

$$30º \ \text{———} \ \frac{\pi}{6} = 0{,}52$$

Por aplicación de la fórmula, será

$$sen\ 30º = 0{,}52 - \frac{0{,}52^3}{6} + \frac{0{,}52^5}{120} - \frac{0{,}52^7}{5040} + \ldots$$

$$= 0{,}52 - 0{,}023434 + 0{,}000316 - \ldots$$

Obsérvese cómo los términos van disminuyendo rápidamente. Si tomamos dos términos de la serie $sen\ 30º = 0{,}52 - 0{,}023434 = 0{,}496566$. Si tomamos tres términos, entonces será $0{,}496882$. Por último –como sabemos– debemos recordar pues el *seno* de $30º$ es igual a $0{,}5$.

*

## Ejercicio Nº 381

Desarrollo de la $f(x) = \cos x$

$$f(x) = \cos x$$

$$f'(x) = -\operatorname{sen} x$$

$$f''(x) = -\cos x$$

$$f'''(x) = \operatorname{sen} x$$

$$f^{IV}(x) = \cos x$$

si $x = 0$, quedará

$$f(0) = \cos 0 = 1$$

$$f'(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f''(0) = -\cos 0 = -1$$

$$f'''(0) = \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$f^{IV}(0) = \cos 0 = 1$$

Se observa que todas las derivadas impares son todas nulas, y que la función y las derivadas pares son alternativamente iguales a *1* y *- 1*.

Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac Laurin quedará,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + R(x)$$

## Ejercicio Nº 382

Calcular *cos 2* (Coseno de dos radianes).

$$\cos 2 = 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \ldots$$



$$= 1 - \frac{4}{2!} + \frac{16}{4!} - \frac{64}{6!} + \frac{256}{8!} - \frac{1024}{10!} + \ldots$$

$$= 1 - \frac{4}{2} + \frac{16}{24} - \frac{64}{720} + \frac{256}{40320} - \frac{1024}{3628800} + \ldots$$

$$= 1 - 2 + 0{,}666666 - 0{,}088888 + 0{,}006349$$

$$- 0{,}000282 = -0{,}416155$$

Debemos decir que dos radianes equivalen aproximadamente a 114º 38' en el sistema sexagesimal; y que el *cos 114º 38' = - cos 65º 22' = - 0,4168*. Es decir, hemos obtenido el valor con un error menor de 1 milésimo.

## Ejercicio Nº 383

Calcular *cos 30º*

$$\cos 30^\circ = \cos 0{,}52 = 1 - \frac{0{,}52^2}{2} + \frac{0{,}52^4}{24} - \frac{0{,}52^6}{720} + \frac{0{,}52^8}{40320} - \ldots$$

$$\cos 0{,}52 = 1 - 0{,}1352 + 0{,}003046 - 0{,}000027 = 0{,}867819$$

El *cos 30º* es igual –por tablas– a 0,8660; se ha conseguido por series con un error menor a 0,01.

## Ejercicio Nº 384

Desarrollo de $\ell^x$

$$f(x) = \ell^x$$

$$f'(x) = \ell^x$$

$$f''(x) = \ell^x$$

$$f'''(x) = \ell^x$$

si $x = 0$ $\therefore$

$$f(0) = \ell^0 = 1$$

$$f'(0) = \ell^0 = 1$$

$$f''(0) = \ell^0 = 1$$

$$f'''(0) = \ell^0 = 1$$

Es decir que la función y las derivadas sucesivas son todas iguales a 1. Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac Laurin nos queda:

$$\ell^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \quad \ldots$$

**Ejercicio Nº 385**

Calcular el valor de $\ell$

En el desarrollo hallado en el ejercicio anterior, hacemos $x = 1$ ∴

$$\ell^1 = \ell = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} +$$

$$+ \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \ldots$$

$$= 2 + 0,5 + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} +$$

$$+ \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} + \frac{1}{3.628.800} + \ldots$$

$$= 2,5 + 0,1666666666 + 0,0416666666 +$$

$$+ 0,0083333333 + 0,0013888888 + 0,0001984126 +$$

$$+ 0,0000248015 + 0,0000027557 + 0,0000002755 =$$

$$= 2.7182818006$$



Se ha obtenido el valor del número $\ell$ con un error por defecto menor a 0,0000001.

**Ejercicio Nº 386**

Calcular el valor de $\frac{1}{\ell}$

En el desarrollo hallado en el ejercicio Nº 384, hacemos $x = -1$.

$$\ell^{-1} = \frac{1}{\ell} = 1 + (-1) + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!} + \frac{(-1)^4}{4!} + \frac{(-1)^5}{5!} + \ldots$$

$$= 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} - \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} - \ldots$$

$$= 0,5 - 0,1666666666 + 0,0416666666 - 0,0083333333$$

$$+ 0,0013888888 - 0,0001984126 + 0,0000248015 -$$

$$- 0,0000027557 + 0,0000002755 = 0,3678794642$$

En general, para hallar $\ell$ elevado a cualquier potencia (entera, fraccionaria, etcétera), lo único que hay que hacer es reemplazar $x$ por el valor pedido.

Ejemplo: $\sqrt{\ell} = \ell^{1/2} \quad \therefore \quad x = \frac{1}{2}$

Se reemplaza $x = \frac{1}{2}$ en el desarrollo del ejercicio 384, y se obtiene $\sqrt{\ell}$.

**Ejercicio Nº 387**

Desarrollo de $L(1 + x)$

$$f(x) = L(1 + x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1}$$

$$f''(x) = -(1 + x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(1+x)^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = -6(1+x)^{-4}$$

$$f^{V}(x) = 24(1+x)^{-5}$$

Si hacemos $x = 0$, nos queda:

$$f(0) = L\,1 = 0$$

$$f'(0) = 1^{-1} = 1$$

$$f''(0) = -1^{-2} = -1$$

$$f'''(0) = 2 \cdot 1^{-3} = 2$$

$$f^{IV}(0) = -6 \cdot 1^{-4} = -6$$

$$f^{V}(0) = 24 \cdot 1^{-5} = 24$$

Reemplazando estos valores en Mac Laurin, tenemos:

$$f(x) = 0 + 1 \cdot x - 1\frac{x^2}{2!} + 2\frac{x^3}{3!} - 6\frac{x^4}{4!} + 24\frac{x^5}{5!} - \dots$$

Haciendo operaciones, queda:

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots$$

Se demuestra que este desarrollo es válido únicamente para $-1 < x \leqslant 1$

## Ejercicio Nº 388

Calcular $L\,1{,}5 = L(1 + \frac{1}{2})$

$$L\,1{,}5 = \frac{1}{2} - \frac{(\frac{1}{2})^2}{2} + \frac{(\frac{1}{2})^3}{3} - \frac{(\frac{1}{2})^4}{4} + \frac{(\frac{1}{2})^5}{5} - \frac{(\frac{1}{2})^6}{6} +$$



$$+ \frac{(\frac{1}{2})^7}{7} - \frac{(\frac{1}{2})^8}{8} + \dots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} +$$

$$+ \frac{1}{896} - \frac{1}{2048} + \frac{1}{4608} - \frac{1}{10240} + \dots$$

Haciendo operaciones da aproximadamente 0,40 $\therefore$ $L\,1{,}5 \sim 0{,}40$

## Ejercicio Nº 389

Desarrollo de $L(1-x)$

$$f(x) = L(1-x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1-x}(-1) = -(1-x)^{-1}$$

$$f''(x) = (1-x)^{-2}(-1) = -(1-x)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(1-x)^{-3}(-1) = -2(1-x)^{-3}$$

$$f^{IV}(x) = 6(1-x)^{-4}(-1) = -6(1-x)^{-4}$$

$$f^{V}(x) = 24(1-x)^{-5}(-1) = -24(1-x)^{-5}$$

Haciendo $x = 0$ $\therefore$

$$f(0) = L(1-0) = L\,1 = 0$$

$$f'(0) = -1$$

$$f''(0) = -1$$

$$f'''(0) = -2$$

$$f^{IV}(0) = -6$$

$$f^{V}(0) = -24$$

Reemplazando estos valores en Mac Laurin, tenemos:

$$L(1-x) = 0 - 1x - 1 \cdot \frac{x^2}{2!} - 2\frac{x^3}{3!} - 6\frac{x^4}{4!} - \dots$$

Haciendo operaciones, queda:

$$f(x) = L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \dots$$

El desarrollo es muy parecido al anterior pero los términos son todos negativos.

## Ejercicio Nº 390

Ahora vamos a ver una forma de calcular logaritmos naturales.

Por lo visto anteriormente,

$$L(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \dots \quad (1)$$

$$L(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \dots \quad (2)$$

Restamos (1) – (2). Observamos lo siguiente:

1. ¿Qué pasa con los términos en donde aparecen las potencias impares de $x$? Por ejemplo,

   $$x - (-x) = 2x \, ; \frac{x^3}{3} - \left(-\frac{x^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^3}{3} = \frac{2x^3}{3}$$

   Y así sucesivamente.

2. Todos los términos con exponentes pares desaparecen, pués por ejemplo,

   $$-\frac{x^2}{2} - \left(-\frac{x^2}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{2} = 0$$

Por lo tanto,



$$L(1+x) - L(1-x) = 2x + 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^5}{5} + \dots$$

$$L\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \dots\right) \quad (3)$$

Si hacemos $\frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n} \quad (4) \quad \therefore$

$$n(1+x) = (1-x)(n+1)$$

$$\not{n} + xn = \not{n} + 1 - n\not{x} - \not{x} \quad \therefore$$

$$n - n + xn + nx + x = 1$$

$$x(n + n + 1) = 1 \quad \therefore \quad x = \frac{1}{2n+1} \quad (5)$$

Reemplazando (4) y (5) en (3), tenemos:

$$L\frac{n+1}{n} = 2\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \dots\right] (6)$$

Esta fórmula sirve para calcular los logaritmos naturales. Si $n = 1$

$$(6) = L\frac{2}{1} = 2\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \dots\right]$$

Y haciendo las operaciones obtenemos el logaritmo natural de 2.

Si $n = 2$

$$(6) = L\frac{3}{2} = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots\right] \quad (7)$$

pero en el primer miembro de (7) tenemos $L\frac{3}{2} = L3 - L2 \quad \therefore$

$$L3 - L2 = 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots\right] \quad \therefore$$

$$L3 = L2 + 2\left[\frac{1}{5} + \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} + \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots\right] \quad (8)$$

Y así obtenemos el $L\,3$ por recurrencia con el $L\,2$. Obsérvese que a medida

que $n$ aumenta, la serie (6) converge mucho más rápidamente. En esta forma se construye una tabla de logaritmos naturales. Si se quiere hallar el logaritmo decimal, se multiplica el logaritmo natural por el módulo de conversión.

## Ejercicio Nº 391

Desarrollo de $f(x) = Sh\,x$

$$f(x) = Sh\,x$$

$$f'(x) = Ch\,x$$

$$f''(x) = Sh\,x$$

$$f'''(x) = Ch\,x$$

$$f^{IV}(x) = Sh\,x$$

Si hacemos $x = 0$, queda:

$$f(0) = Sh\,0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$f'(0) = Ch\,0 = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Recuérdese que $Sh\,x$ (seno hiperbólico de $x$) es igual a $\frac{e^x - e^x}{2}$; que el $Ch\,x$, $= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Se ve que la $f(x)$ y las derivadas pares cuando $x = 0$, se anulan; las derivadas impares valdrán todas 1. Por lo tanto, el desarrollo será:

$$Sh\,x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots$$

## Ejercicio Nº 392

Calcular $Sh\,1$



Reemplazando en la fórmula anterior $x = 1$ $\therefore$

$$Sh\,1 = 1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{120} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{362880} + \ldots$$

Obsérvese que $Sh\,1 = \frac{e^1 - e^{-1}}{2} = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{2.718281 - 0{,}367879}{2} =$

$$= \frac{2{,}350402}{2} = 1{,}175201$$

## Ejercicio Nº 393

Desarrollo de $Ch\,x$

$$f(x) = Ch\,x$$

$$f'(x) = Sh\,x$$

$$f''(x) = Ch\,x$$

$$f'''(x) = Sh\,x$$

$$f^{IV}(x) = Ch\,x$$

$$f^{V}(x) = Sh\,x$$

Si hacemos $x = 0$ $\therefore$

$$f(0) = Ch\,0 = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = 1$$

$$f'(0) = Sh\,0 = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 0$$

Es decir, las derivadas impares se anulan; la función y las derivadas pares valen todas 1. Por lo tanto el desarrollo será,

$$Ch\,x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots$$

**Ejercicio Nº 394**

Calcular *Ch 1*

Si hacemos $x = 1$ en el desarrollo del ejercicio anterior, será:

$$Ch\,1 = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{10!} + \ldots$$

$$= 1 + 0{,}5 + 0{,}041666 + 0{,}013888 + 0{,}00024 +$$

$$+ 0{,}000000 = 1{,}555578$$

Si hubiéramos hecho:

$$Ch\,1 = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{2{,}718281 + 0{,}367879}{2} =$$

$$= \frac{3{,}086160}{2} = 1{,}543080$$

**Ejercicio Nº 395**

Desarrollo de $f(x) = a^x$

$$f(x) = a^x$$

$$f'(x) = a^x\,L\,a$$

$$f''(x) = a^x\,(L\,a)^2$$

$$f'''(x) = a^x\,(L\,a)^3$$

$$f^{IV}(x) = a^x\,(L\,a)^4$$

Si $x = 0 \quad \therefore$



$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = L\,a$$

$$f''(0) = (La)^2$$

$$f'''(0) = (L\,a)^3$$

$$f^{IV}(0) = (L\,a)^4$$

Reemplazando estos valores en la fórmula,

$$f(x) = a^x = 1 + L\,a\,.\,x + (L\,a)^2\,.\,\frac{x^2}{2!} + (L\,a)^3\frac{x^3}{3!} + \ldots$$

**Ejercicio Nº 396**

Desarrollo de $f(x) = 2^x$

Si hacemos $a = 2$ en el desarrollo anterior, tenemos:

$$f(x) = 2^x = 1 + x\,.\,L\,2 + \frac{x^2}{2!}\,(L\,2)^2 + \frac{x^3}{3!}\,(L\,2)^3 +$$

$$+ \frac{x^4}{4!}\,(L\,2)^4 + \ldots$$

**Ejercicio Nº 397**

Desarrollo de $f(x) = (1 + x)^m$

$$f(x) = (1 + x)^m$$

$$f'(x) = m\,(1 + x)^{m-1}$$

$$f''(x) = m\,(m-1)\,(1 + x)^{m-2}$$

$$f'''(x) = m\,(m-1)\,(m-2)\,(1 + x)^{m-3}$$

$$f^{IV}(x) = m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\,(1 + x)^{m-4}$$

Si hacemos $x = 0$ $\therefore$

$$f(0) = 1$$

$$f'(0) = m$$

$$f''(0) = m(m-1)$$

$$f'''(0) = m(m-1)(m-2)$$

$$f''''(0) = m(m-1)(m-2)(m-3)$$

Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac Laurin, tenemos:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + \ldots$$

Se demuestra que esta serie es convergente para $|x| < 1$.

## Ejercicio Nº 398

Desarrollo de $\sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2}$$

Reemplazamos $m = \frac{1}{2}$ en el desarrollo anterior.

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{-\frac{1}{4}}{2!}x^2 + \frac{\frac{3}{8}}{3!}x^3 + \frac{-\frac{15}{16}}{4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{-5}{128}x^4 + \ldots$$



## Ejercicio Nº 399

Desarrollo de $\sqrt[3]{1+x}$

$$\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{1/3}$$

$$(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})}{3!}x^3 +$$

$$+ \frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-\frac{8}{3})}{4!}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x + \frac{-\frac{2}{9}}{2}x^2 + \frac{\frac{10}{27}}{6}x^3 + \frac{-\frac{80}{81}}{24}x^4 + \ldots$$

$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \ldots$$

## Ejercicio Nº 400

Desarrollo de $f(x) = \frac{1}{1+x}$

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \quad \therefore \quad m = -1$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 + (-1)x + \frac{(-1)(-2)}{2!}x^2 +$$

$$+ \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}x^3 + \ldots = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

## Ejercicio Nº 401

Calcular la $\sqrt[5]{48}$

$$\sqrt[5]{45} = \sqrt[5]{2^5 + 16} = \sqrt[5]{2^5\left(1 + \frac{16}{2^5}\right)} = 2\sqrt[5]{1 + \frac{16}{32}} \qquad (1)$$

(1) está colocado como $\sqrt[m]{1+x}$, siendo $|x|$ menor que $1$.

Desarrollando (1), tenemos:

$$2\sqrt[5]{1+\frac{16}{32}} = 2\,(1+0{,}5)^{1/5}$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{5}\cdot 0{,}5 + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}(0{,}5)^2 + \right.$$

$$\left.+\frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})(-\frac{9}{5})}{3!}\cdot(0{,}5)^3 + \ldots\right] =$$

$$= 2\left[1+0{,}1+\frac{-\frac{4}{25}}{2}\cdot 0{,}25+\frac{\frac{36}{125}}{6}0{,}125+\ldots\right]$$

$$= 2\left[1+0{,}1-\frac{2}{25}\cdot 0{,}25+\frac{6}{125}\cdot 0{,}125+\ldots\right]$$

$$= 2\,[\,1+0{,}1-2\cdot 0{,}01+6\cdot 0{,}001+\ldots\,]$$

$$= 2\,[\,1+0{,}1-0{,}02+0{,}006+\ldots\,]$$

### Ejercicio Nº 402

Calcular $\sqrt[4]{24}$

$$\sqrt[4]{24} = \sqrt[4]{16+8} = \sqrt[4]{2^4+8} = \sqrt[4]{2^4\left(1+\frac{8}{24}\right)} = 2\sqrt[4]{1+\frac{8}{16}}$$

$$= 2\left(1+\frac{1}{2}\right)^{1/4} \quad (1) \qquad m = \frac{1}{4}$$

$$(1) = 2\left[1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})}{2!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{\frac{1}{4}(-\frac{3}{4})(-\frac{7}{4})}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3+\ldots\right.$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{8}+\frac{-\frac{3}{16}}{2}\cdot\frac{1}{4}+\frac{\frac{21}{64}}{6}\cdot\frac{1}{8}+\ldots\right]$$

$$= 2\left[1+\frac{1}{8}-\frac{-3}{128}+\frac{7}{1024}+\ldots\right]$$



### Ejercicio Nº 403

Desarrollar por series $\dfrac{\ell^x}{x}$

$$f(x) = \frac{\ell^x}{x} = \frac{1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\ldots}{x}$$

$$f(x) = \frac{\ell^x}{x} = \frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\ldots$$

### Ejercicio Nº 404

Desarrollar la función $\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$

$$\frac{\text{sen}\,x}{x} = \frac{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots}{x}$$

$$= 1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\ldots$$

### Ejercicio Nº 405

Desarrollar la función $\dfrac{\cos x}{x}$

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots}{x}$$

$$\frac{\cos x}{x} = \frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\frac{x^5}{6!}+\frac{x^7}{8!}\ldots$$

### Ejercicio Nº 406

Calcular el $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}\,x}{x}$ utilizando series

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) = 1$$

(Ver ejercicio Nº 404)

**Ejercicio Nº 407**

Calcular el límite de $\frac{1 - \cos x}{x^2}$ para $x \to 0$, utilizando series.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \ldots}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \ldots\right) = \frac{1}{2}$$

Recordemos que por L'Hospital, $\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

**Ejercicio Nº 408**

Desarrollar la $f(x) = tg\, x$

En lugar de calcular las derivadas sucesivas de la $f(x)$, ponemos $tg\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$tg\, x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!}}$$

$$= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots} \qquad (1)$$



Recordando la regla del cociente de dos polinomios, queda:

$$(1) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17}{315} x^7 + \ldots$$

**Ejercicio Nº 409**

Desarrollo de $f(x) = tg\, x$ (directamente).

$$f(x) = tg\, x$$

$$f'(x) = 1 + tg^2 x = 1 + (tg\, x)^2$$

$$f''(x) = 2\, tg\, x \,.\, (1 + tg^2 x) = 2\, tg\, x + 2\, tg^3 x =$$

$$= 2\, tg\, x + 2\,(tg\, x)^3$$

$$f'''(x) = 2\,[\,1 + (tg\, x)^2\,] + 6\,(tg\, x)^2\,[\,1 + (tg\, x)^2\,]$$

$$= 2 + 2\,(tg\, x)^2 + 6\,(tg\, x)^2 + 6\,(tg\, x)^4$$

$$= 2 + 8\,(tg\, x)^2 + 6\,(tg\, x)^4$$

$$f^{IV}(x) = 16\, tg\, x \,.\, [\,1 + (tg\, x)^2\,] + 24\,(tg\, x)^3\,[1 + (tg\, x)^2] =$$

$$= 16\, tg\, x + 16\,(tg\, x)^3 + 24\,(tg\, x)^3 + 24\,(tg\, x)^5 =$$

$$= 16\, tg\, x + 40\,(tg\, x)^3 + 24\,(tg\, x)^5$$

$$f^{(5)}(x) = 16\,[\,1 + (tg\, x)^2] + 120\,(tg\, x)^2 \,.\, [\,1 + (tg\, x)^2\,] +$$

$$+ 120\,(tg\, x)^4\,[\,1 + (tg\, x)^2\,] =$$

$$= 16 + 16\,(tg\, x)^2 + 120\,(tg\, x)^2 + 120\,(tg\, x)^4 +$$

$$+ 120\,(tg\, x)^4 + 120\,(tg\, x)^6$$

Si hacemos $x = 0 \quad \therefore$

$$f(0) = tg\,0 = 0$$

$$f'(0) = 1$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(0) = 2$$

$$f^{IV}(0) = 0$$

$$f^{V}(0) = 16$$

Obsérvese que la función y las derivadas pares son nulas. Reemplazando estos valores en la fórmula de Mac Laurin, nos queda:

$$tg\,x = x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{16x^5}{5!} + \ldots$$

$$tg\,x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$$

(Recuérdese que la $D tg\,x = sec^2\,x = 1 + tg^2\,x$)

## Ejercicio Nº 410

Desarrollo de $f(x) = cotg\,x$

$$cotg\,x = \frac{\cos x}{sen\,x} = \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \ldots}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots}$$

$$cotg\,x = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots}{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \ldots}$$

Hacemos el cociente:



Dividendo: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots$

Divisor: $x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$

Cociente: $\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x - \frac{x^3}{45} + \ldots$

$$\begin{array}{l} \phantom{-}1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \ldots \\ - \\ \phantom{-}1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} - \frac{x^6}{5040} + \ldots \\ \hline - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{30} - \frac{x^6}{840} + \ldots \\ - \\ - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{18} - \frac{x^6}{360} + \frac{x^7}{15120} \\ \hline - \frac{x^4}{45} + \frac{x^6}{210} - \ldots \\ - \frac{x^4}{45} + \frac{x^6}{270} + \ldots \end{array}$$

Es decir,

$$cotg\,x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \ldots$$

## Ejercicio Nº 411

Determinar el $sen\,31^o$ en función de las funciones de $30^o$.

Apliquemos la fórmula de Taylor, que como sabemos es:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)\,h + f''(x)\,.\frac{h^2}{2!} + f'''(x)\,.\frac{h^3}{3!} + \ldots \quad (1)$$

$$f(x) = sen\,x$$

$$f'(x) = \cos x$$

$$f''(x) = -sen\,x$$

$$f'''(x) = -\cos x$$

$$f^{IV}(x) = sen\,x$$

Si $x = 30^o \;\therefore$

$$f(x) = sen\,30^o = \frac{1}{2}$$

$$f'(x) = cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f''(x) = -sen\,30^o = -\frac{1}{2} \qquad (2)$$

$$f'''(x) = -cos\,30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f^{IV}(x) = sen\,30^o = \frac{1}{2}$$

Por otra parte, $h = 1^o$, que en el sistema circular equivalen a

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}0174533 \text{ radianes } (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) nos queda:

$$sen\,31^o = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\ 0{,}0174533 - \frac{1}{2}.\ \frac{0{,}0174533^2}{2!} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}.\ \frac{0{,}0174533^3}{3!} + \ldots$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.\ 0{,}0174533 - \frac{0{,}0174533^2}{4} - \frac{\sqrt{3}.\ 0{,}0174533^3}{12} + \ldots$$

Obsérvese que la serie converge muy rápidamente.

## Ejercicio Nº 412

Determinar coseno de $40^o$ en función del $cos\,30^o$

$$f(x) = cos\,x$$

$$f'(x) = -sen\,x$$

$$f''(x) = -cos\,x$$



$$f'''(x) = sen\,x$$

$$f^{IV}(x) = cos\,x$$

Si hacemos $x = a = 30^o$

$$f(a) = cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'(a) = -sen\,30^o = -\frac{1}{2}$$

$$f''(a) = -cos\,30^o = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'''(a) = sen\,30^o = \frac{1}{2}$$

$$f^{IV}(a) = cos\,30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$h = 40^o - 30^o = 10^o$, que en el sistema circular equivalen a $0{,}174533$.

$$cos\,40^o = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}.\ 0{,}174533 - \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \frac{0{,}174533^2}{2!} + \frac{1}{2}.\ \frac{0{,}174533^3}{3!} +$$

$$+ \frac{\sqrt{3}}{2}.\ \frac{0{,}174533^4}{4!} + \ldots$$

## Ejercicio Nº 413

Determinar $tg\,46^o$ en función de $tg\,45^o$

Hemos visto en el ejercicio Nº 409 que:

$$f(x) = tg\,x$$

$$f'(x) = 1 + (tg\,x)^2$$

$$f''(x) = 2\,tg\,x + 2\,(tg\,x)^3$$

$$f'''(x) = 2 + 8\,(tg\,x)^2 + 6\,(tg\,x)^4$$

$$f^{IV}(x) = 16\,tg\,x + 40\,(tg\,x)^3 + 24\,(tg\,x)^5$$

$$f^{(5)}(x) = 16 + 136\,(tg\,x)^2 + 240\,(tg\,x)^4 + 120\,(tg\,x)^6$$

Si hacemos $x = 45^o$

$$f(45^o) = 1$$

$$f'(45^o) = 1 + 1 = 2$$

$$f''(45) = 2 + 2 = 4$$

$$f'''(45) = 2 + 8 + 6 = 16$$

$$f^{IV}(45) = 16 + 40 + 24 = 80$$

Por otra parte, $h = 46^o - 45^o = 1^o$ que equivale a $0{,}0174533$ radianes.

Con estos elementos, tenemos:

$$tg\,46^o = 1 + 2\,.\,0{,}0174533 + 4\,.\,\frac{0{,}0174533^2}{2!} + 16\,.\,\frac{0{,}0174533^3}{3!} +$$

$$+ 80\,.\,\frac{0{,}0174533^4}{4!} + \ldots$$

*

# INDICE

**I. Tabla de derivadas** .......... 3
**II. Demostraciones de cada una de las derivadas** .......... 4
1. Derivada de $y = c$ .......... 4
2. Derivada de $y = x$ .......... 6
3. Derivada de $y = u + v - w$ .......... 6
4. Derivada de $y = u\,.\,v$ .......... 7
5. Derivada de $y = u\,.\,v\,.\,w$ .......... 8
6. Derivada de $y = C\,.\,f(x)$ .......... 8
7. Derivada de $y = x^n$ ($n$: número natural) .......... 9
8. Derivada de $y = \frac{u}{v}$ .......... 10
9. Derivada de $y = log_a x$ .......... 11
10. Derivada de $y = L\,x$ .......... 13
11. Derivada de $x^n$ ($n$: número real) .......... 13
12. Derivada de $y = a^x$ .......... 14
13. Derivada de $y = e^x$ .......... 14
14. Derivada de $y = u\,.\,v$ (método logarítmico) .......... 15
15. Derivada de $y = \frac{u}{v}$ (método logarítmico) .......... 15
16. Derivada de $y = sen\,x$ .......... 15
17. Derivada de $y = cos\,x$ .......... 17
18. Derivada de $y = tg\,x$ .......... 17
19. Derivada de $y = cotg\,x$ .......... 18
20. Derivada de $y = sec\,x$ .......... 18
21. Derivada de $y = cosec\,x$ .......... 19
22. Derivada de $y = arc\,sen\,x$ .......... 19
23. Derivada de $y = arc\,cos\,x$ .......... 20
24. Derivada de $y = arc\,tg\,x$ .......... 20
25. Derivada de $y = arc\,cotg\,x$ .......... 20
26. Derivada de $y = arc\,sec\,x$ .......... 21
27. Derivada de $y = arc\,cosec\,x$ .......... 21
**III. Ejercicios sobre cálculo de derivadas** .......... 23
Derivadas de constantes .......... 23
Derivadas de variables .......... 26
Derivadas aplicando la regla referente a la derivada de $y = x^n$ .......... 27
Derivadas por incrementos .......... 28
Derivadas de sumas algebraicas .......... 31
Derivadas de productos .......... 33

Derivadas de función de función . . . . . . . . . . 34
Derivadas de cocientes . . . . . . . . . . 37
Derivadas de funciones trigonométricas directas . . . . . . . . . . 40
Derivadas de funciones logarítmicas . . . . . . . . . . 43
Derivadas de funciones exponenciales . . . . . . . . . . 46
Derivadas de funciones trigonométricas inversas . . . . . . . . . . 49
Derivadas de funciones hiperbólicas . . . . . . . . . . 55
Derivadas de funciones hiperbólicas inversas . . . . . . . . . . 61
Ejercicios aplicando el método logarítmico . . . . . . . . . . 65
Ejercicios varios . . . . . . . . . . 72

APLICACIONES DE LAS DERIVADAS

**I. Rectas tangente y normal** . . . . . . . . . . 83
**II. Segmentos subtangente, subnormal, tangente y normal** . . . . . . . . . . 102
**III. Máximos y mínimos relativos** . . . . . . . . . . 106
**IV. Concavidad. Puntos de inflexión** . . . . . . . . . . 123
**V. Derivadas sucesivas** . . . . . . . . . . 130
**VI. Elasticidad de una función** . . . . . . . . . . 138
**VII. Diferencial de una función** . . . . . . . . . . 142
**VIII. Teorema de Lagrange** . . . . . . . . . . 145
**IX. Límites indeterminados** . . . . . . . . . . 152
Caso $\frac{0}{0}$ . . . . . . . . . . 152
Caso $\frac{\infty}{\infty}$ . . . . . . . . . . 162
Caso $\infty \cdot 0$ . . . . . . . . . . 165
Caso $\infty - \infty$ . . . . . . . . . . 167
Caso $0^0$ . . . . . . . . . . 171
Caso $1^\infty$ . . . . . . . . . . 175
Caso $\infty^0$ . . . . . . . . . . 180
**X. Fórmulas de Mac Laurín y Taylor** . . . . . . . . . . 183
Bibliografía . . . . . . . . . . 209

***

**BIBLIOGRAFIA**

1. Trejo, César A. – "Curso de Matemática General".
2. Rey Pastor, J., Pi Calleja, P. y Trejo César A., – "Análisis Matemático" 1er. Tomo.
3. Sadosky, M.; Guber, Rebeca Ch. de – "Elementos de Cálculo Diferencial e Integral".
4. Allen, R. G. D. – "Análisis Matemático para Economistas".
5. Toranzos, F. I. – "Formación Matemática del Economista".

Se deja constancia que básicamente para el nivel del curso se adaptan perfectamente los libros citados bajo los números 1 y 3 en orden de creciente rigurosidad. El alumno que desee profundizar con más rigor el tema, deberá leer la obra citada como número 2.

Las obras 4 y 5 tienen además de todo el cálculo de derivadas y sus múltiples problemas, aplicaciones de carácter económico.

*

ESTE LIBRO SE TERMINO DE
IMPRIMIR EN AZAR IMPRESORES
RODRIGUEZ PEÑA 466, BUENOS AIRES
EN EL MES DE ENERO DE 1969